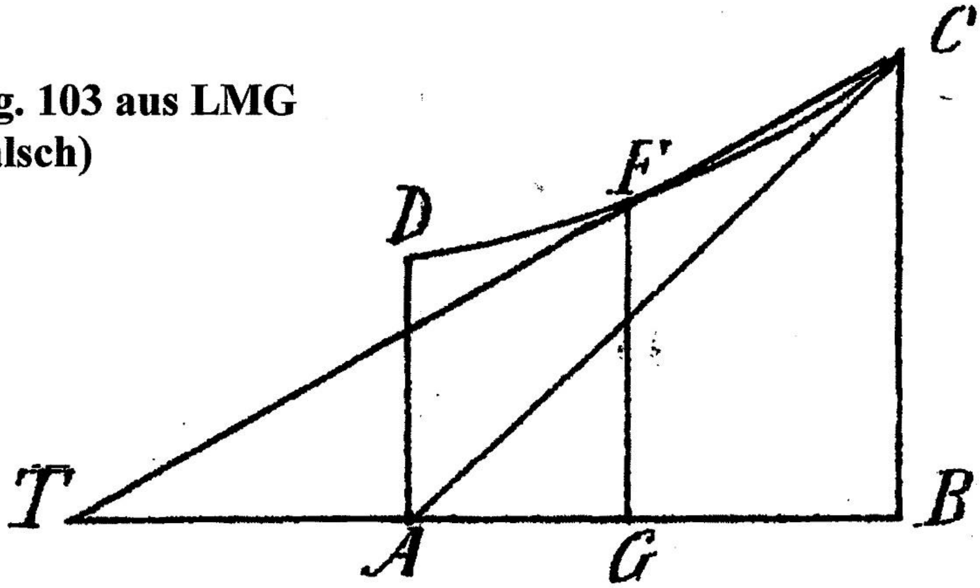
Das Kettenproblem
in Briefen von Leibniz an v. Bodenhausen (ab 1691)

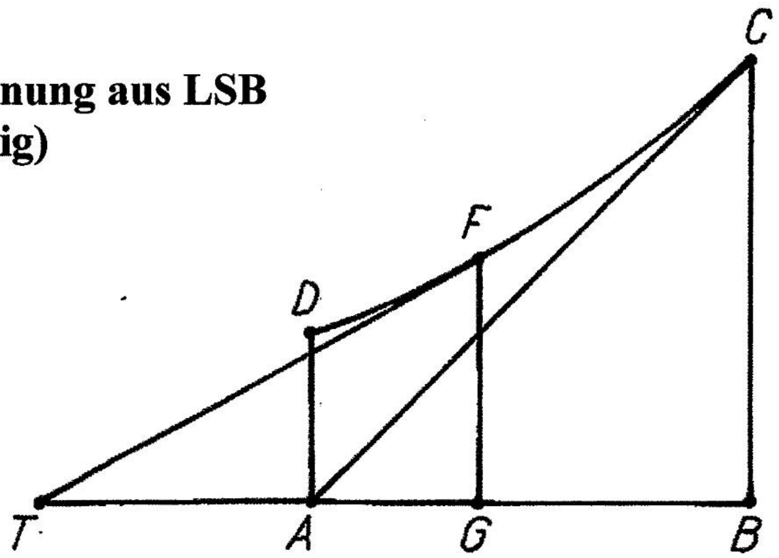
Zur Exponential- und Differentialgleichung der logarithmischen Kurve

Fig. 103 aus LMG
(falsch)



Zu korrigieren: TF $\nparallel$ FC, denn
logar. Kurve : $\overset{\frown}{DFC}$,
Tangente in F: TF,
in C: AC.

Zeichnung aus LSB
(richtig)



$AB = BC = 1\,,\ BG = x$
$DA = b\,, FG = y\,,\ \boxed{y = b^x}$

$$TG = a = AB \Rightarrow \frac{TG}{GF} = \frac{a}{y} = \frac{dx}{dy} \Rightarrow a\,dy = y\,dx \Rightarrow \boxed{dy = y\,dx}$$

Was die begehrte Gleichung der logarithmischen Kurve betrifft, dazu diene folgendermaßen dies:

Gesetzt AB sei = BC, und = 1, also dass a der Parameter der logarithmischen [Kurve] ist, und BG sei x, FG sei y, und DA sei b, so ist $y = b^x$, welche eine exponentiale transzendente Gleichung[1] ist; es sind aber die exponentialen Gleichungen von allen transzendenten die perfektesten, wenn man sie erlangen kann.

Es haben aber BC und AD oder 1 und b immer eine beständige Proportion zusammen, so in allen logarithmischen Kurven bleibet, und die Verbindung[sgerade] AC berührt die Kurve in C.

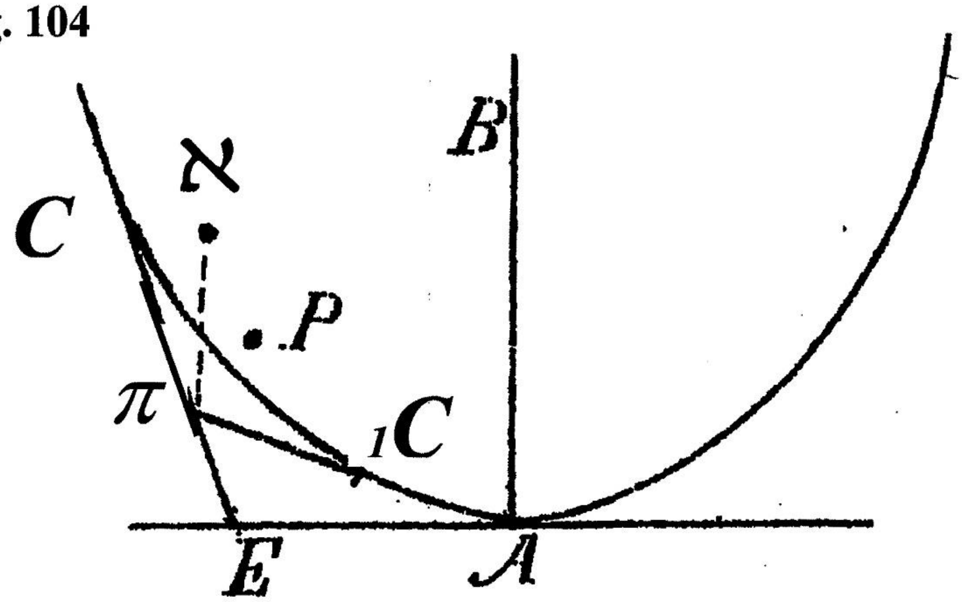
Um aber die transzendenten [Kurven] auch durch Differentialgleichungen auszudrücken, kann man es so tun:

Die Natur der logarithmischen [Kurve] bringt mit sich, dass, – wenn ein beliebiger Punkt F genommen und von dort die Tangente TF ausgezogen ist und sie die Asymptote BA in T trifft –, die Gerade GT konstant bzw. immer gleich demselben ist, nämlich dem Parameter AB oder BC oder 1 selbst. Deshalb, wenn wir nun BC oder 1 a nennen, wird TG bzw. a zu GF bzw. y werden wie dx zu dy, bzw. es wird die Gleichung $a\,dy = y\,dx$ entstehen, bzw. es wird, gesetzt $a = 1$, [Gl.] $dy = y\,dx$ entstehen, die diejenige Differentialgleichung ist, die die Natur der logarithmischen Kurve ausdrückt; sie ist von größter Einfachheit, wie denn gewiss von allen transzendenten die logarithmische [Kurve] die einfachste ist.

[1] aequatio transcendens exponentialis

Die Grundannahme der Kettenkurve

Fig. 104



ℵπ ⊥ EA
PE ⊥ EA
Cπ, π 1C, EA = Tangenten an C 1C A in C, 1C, A
EA · Bogenlänge AC = Moment des Bogens AC bzgl. AB-Achse

Die Grundannahme, um die Natur der Kettenkurve auf eine Gleichung zu bringen, ist diejenige, die Huygens, P. Pardies und andere[1] vorlängst bezüglich der Eigenschaft der Kurventangenten angemerkt haben, dass nämlich die Tangenten Cπ (Fig. 104) und 1Cπ einander treffen im Punkt π, der senkrecht steht unter ℵ, dem Schwerezentrum des Bogens C 1C.

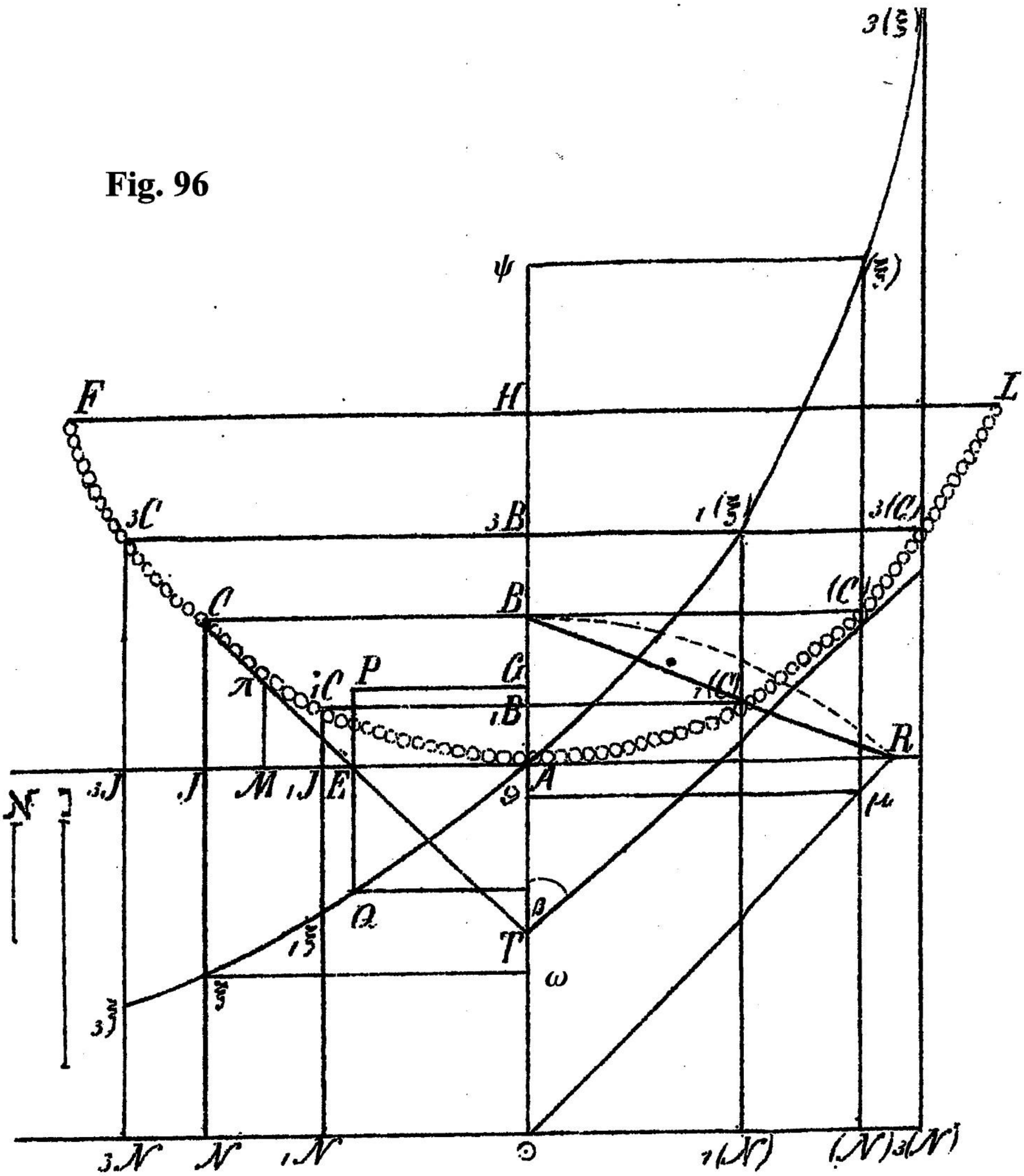
Wenn daher AE die Tangente des Scheitels A ist, und die Tangente des Punktes C die Tangente des Punktes A bei E antrifft, so muss E senkrecht stehen unter dem Schwerezentrum P des Bogens AC, d. h. AE ist der Abstand des Schwerezentrums des Bogens AC von der Achse AB, oder AE mal AC ist das Momentum des Bogens bzw. der Kette AC von der Achse her.
Aufgrund dieser Überlegung kann man nun zu der Differentialgleichung kommen, durch deren Verfolgung man endlich alle die von mit gesetzten Theoreme herausbringen kann.

[1] Hugenius: wohl zuerst in seinem Jugendwerk "De catena pendente" von 1646 (Huygens, Oeuvres 11, S. 37 f.).
Pardies: vgl. I. G. Pardies, La statique, 1673, cap. LXXIII f.

LMG VII, 370 ff

Kettenlinienproblem

Fig. 96



Lösung des von Galilei zuerst vorgelegten Problems über die Natur und den Nutzen einer Linie, in die eine Kette oder ein Seil (ohne Änderung der Ausdehnung) sich unter dem Eigengewicht krümmt.

Von der Kettenlinie FCA(C)L (Fig. 96) ist die Breite C(C) der doppelte Logarithmus θN; die Höhe NC oder θB ist das arithmetische Mittel zwischen den zwei Zahlen Nξ und (N)(ξ) desselben

Logarithmus, von denen ja das geometrische Mittel die Einheit θA ist, so dass, wenn θ3N = θA ist, θA zu 3N3ξ in einem bestimmten Verhältnis ist, hier dargestellt als ב zu א.
Daher kann man mit Hilfe einer Kette oder eines Seilchens ohne jeden Kalkül die Logarithmen aus den Zahlen und die Zahlen aus den Logarithmen finden.
Außerdem hat man für die Tangenten[betrachtung], für die Ausmessung der Linie, der Fläche und für die zu findenden Schwerezentren von beiden:
$\theta R = \theta B$; $\theta R - AR = N\xi$; $\theta R + AR = (N)(\xi)$; die Dreiecke θAR und CBT sind ähnlich; $AR = \widehat{AC}$; $\psi\,\omega = \widehat{CA(C)}$ = zweimal $\widehat{AC}$; Rechteck RAθ = Fläche $A\theta N\widehat{CA}$.

Es seien G, P, Q die Schwerezentren von $\widehat{CA(C)}$, $\widehat{CA}$, $A\theta N\widehat{CA}$, und es wird $\theta\vartheta + \theta B$ = zweimal θG = viermal θβ und AE = GP = βQ sein.

Analysis des Kettenproblems

AB = x ; BC = y. Aufgrund der Natur der Kurve [gilt] nun: Wenn unter der Voraussetzung, dass P das Schwerezentrum des Bogens bzw. der Kette A 1C C ist, [und] auf die Tangente AJ des Scheitels A die Senkrechte PE herabgelassen ist, dann wird die Verbindung[sgerade] CE die Kurve bei C berühren. Von C möge die Senkrechte CJ herabgelassen werden; es wird $JE = x\,dy : dx$ sein, und EA bzw. e wird $\overset{(1)}{=} y - x\,dy : dx$ sein.
Weil andererseits P das Schwerezentrum des Bogens AC, der n genannt werden wird, und n $\overset{(2)}{=} \int\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}$, und das Moment des Bogens bezüglich der Achse AB $\int\overline{y\,d\overline{n}}$ ist, und dieses durch den Bogen n selbst geteilte Moment den Abstand des Bogenzentrums von der Achse ergibt, bzw. GP oder AE, entsteht $e \overset{(3)}{=} y - x\,dy : dx \overset{(4)}{=} \int\overline{y\,d\overline{n}} : n$, und aus (3) entsteht $d\overline{e} \overset{(5)}{=} -x\,d\,\overline{d\overline{y} : d\overline{x}}$.
Andererseits [entsteht] aus (4) $d\overline{e} \overset{(6)}{=} y\,d\overline{n} : n - d\overline{n}\int\overline{y\,d\overline{n}} : nn$; werden daher die zwei Werte von $d\overline{e}$ verglichen und für $\int\overline{y\,d\overline{n}} : n$ der Wert $y - x\,dy : dx$ substituiert, entsteht nach den auszuführenden Streichungen $-\overline{d\,d\overline{x} : d\overline{y}} : \overline{d\overline{x} : d\overline{y}} \overset{(7)}{=} d\overline{n} : n$.
Daher folgt $dx : dy \overset{(8)}{=} n : a$ [1] bzw. (durch Gl. 2) $dx : dy \overset{(9)}{=} \int\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2} : a$, wobei a gleichsam als anzunehmende Einheit entsteht, um das Homogenitätsgesetz zu erfüllen[2]. Und durch Differenzieren von Gleichung 8 entsteht $d\overline{n} : a \overset{(10)}{=} d\,dx : dy$, vorausgesetzt, dass dy immer konstant ist, bzw. die y gleichförmig wachsen, bzw. dass $d\,dy \overset{(11)}{=} 0$ ist, was so anzunehmen im freien Ermessen liegt.
Weil nun $d\overline{n}^2 = d\overline{x}^2 + dy^2$ (durch Gl. 2) ist, entsteht $d\overline{n}\,ddn = dx\,ddx + dy\,ddy$, und weil $ddy = 0$ ist, wird $dn\,ddn \overset{(12)}{=} dx\,ddx$, und durch das Entfernen von ddx aus Gl. 10 mit Gl. 12 entsteht $ddn \overset{(13)}{=} dy\,dx : a$, und weil dy konstant ist, entsteht daher (durch Summieren) $dn \overset{(14)}{=} dy\,x : a + d\overline{y}$, nämlich mit dem als konstant gesetzten dy (bzw. $d\,dy = 0$) führt Gl. 14 durch Differenzieren zurück auf Gl. 13.

---

[1] Dazu bemerkt Leibniz in LSB III, 5, S. 153 f: Wenn man an einer von mir festgesetzten Konsequenz zweifelt, zum Exempel ab Gl. 8, folgt aus Gl. 7, kann man es per Regressum probieren, zum Exempel, wenn man aus Gl. 8 das Differential dieser Gleichung 8 sucht, wird man, wenn a entfernt ist, mit Hilfe dieses Differentials aus Gl. 8 endlich Gl. 7 erhalten.
[2] siehe: Zur Exponential- und Differentialgleichung der logarithmischen Kurve (Fig. 103)

Weiter entsteht aus Gl. 14 mit Gl. 2, durch Entfernen von dn, $d\bar{x}a:\sqrt{2xa+xx} \overset{(15)}{=} dy$, und wird $x \overset{(16)}{=} z-a$ gemacht bzw. $z=\theta B$, entsteht $d\bar{z}a:\sqrt{zz-aa} \overset{(17)}{=} dy$, wobei $\theta A=a$ ist.

Weil nun $dz \overset{(18)}{=} dx$ ist, entsteht durch 8 $dy : dz \overset{(19)}{=} a : n$. Also entsteht durch den Beitrag von Gl. 17 und 19 $n \overset{(20)}{=} \sqrt{zz-aa}$, die die Ausstreckung der Kurve in eine Gerade ist.

Ferner entsteht aus Gl. 14 mit Gl. 16 $d\bar{n}:dy \overset{(21)}{=} z:a$. Also entsteht durch Verbindung der Gleichungen 19 und 21 dy; dx; dn $\overset{(22)}{::}$ a; n; z bzw. dy, dx, dn, und daher verhalten sich CB, BT, TC untereiner wie a, n, z bzw. wie θA, AC, θB; und weil θR = θB bzw. z genommen ist, wird $AR=\sqrt{zz-aa}$, also (mit 20) entsteht AR = n = dem Bogen AC; also verhalten sich CB, BT, TC wie θA, AR, Rθ, bzw. sind die Dreiecke CBT und θAR ähnlich. In dieser Weise haben wir die Eigenschaft der Kurventangenten.

Die Quadratur der Fläche folgt aus Gl. 21, weil $\int \overline{\overline{zdy}} \overset{(23)}{=} an$ ist.

Ferner werde $z+n \overset{(24)}{=} aa:\omega$ gesetzt. Also (mit 20) $z-n \overset{(25)}{=} \omega$, und so entsteht durch Entfernen von z und n aus Gl. 21 durch Gl. 24 oder 25 (und deren Differentiale) $d\bar{y} \overset{(26)}{=} -d\omega a:\omega$, bzw. wenn die ω wie Zahlen (kleiner als die Einheit wegen des Vorzeichens –) sind, werden die y wie die Logarithmen sein.

Und deshalb, wenn Aθ bzw. a gleich θ3N, und a der Parameter der Logarithmischen [Kurve] ist, bzw. wenn die Verbindungsgerade A3N die Logarithmische Aξ3ξ in A berührt, und zwischen θA und 3N3ξ beliebig viele mittlere Proportionale gefunden werden, durch deren Endpunkte ξ3ξ usw. die Logarithmische Kurve Aξ 3ξ hinübergehen möge, dann wird θN bzw. BC bzw. y der Logarithmus sein, und Nξ bzw. θω wird die Zahl ω sein, die kleiner als die Einheit a bzw. θA ist, und wenn θ(N) = θN gesetzt ist, wird die Zahl (N)(ξ) größer als die Einheit θA bzw. a sein und θB bzw. NC bzw. z (mit 24 und 25) wird $\overline{N\xi+(N)(\xi)}:2$ sein, bzw. das arithmetische Mittel zwischen Nξ und (N)(ξ).

Und hierauf beruht fast alles, was ich hinsichtlich dieser Kurve gefunden habe, mit Ausnahme der Schwerezentren[3], die ich der Kürze wegen nun auslasse.

[3] Quellen in LSB?

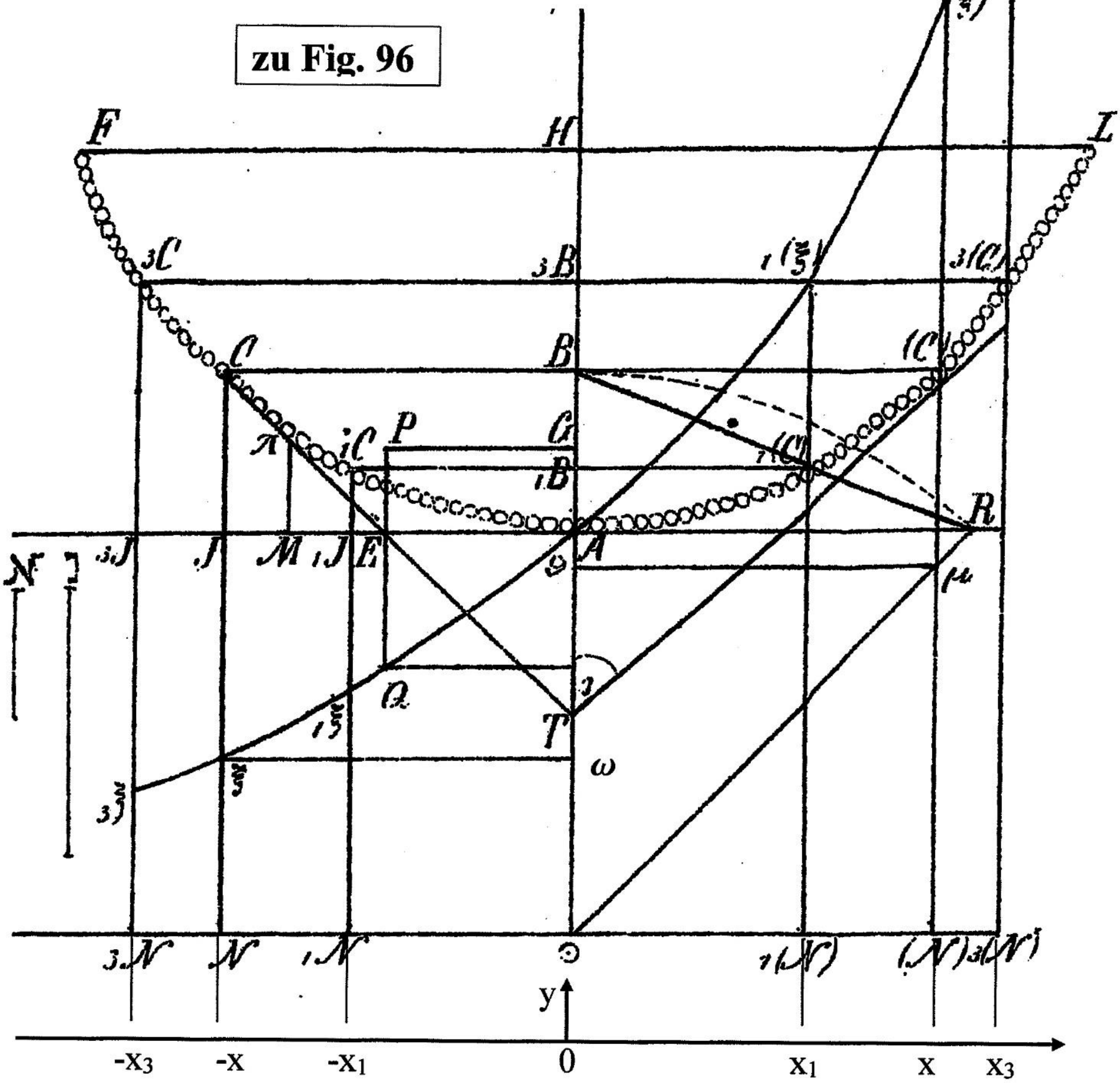
Anwendung der Kettenlinie z=z(x) – Konstruktion von Logarithmen

$\Theta_3 N = |-x_3| = \Theta A = 1$, $\Theta R = \Theta B = NC = (N)(C) = z(\mp x)$, $x \geq 0$

$$\frac{\beth}{\aleph} = \frac{\Theta A}{{}_3N_3\xi} = \frac{y(0)}{y(-x_3)} = \frac{1}{e^{-1}} = e = 2{,}7182818 = y(x_3) = \frac{{}_3(N)_3(\xi)}{\Theta A}$$

$$z(\mp x) = \Theta B = \tfrac{1}{2}\big(N\xi + (N)(\xi)\big) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right)$$

zu Fig. 96



$y(-x_3) = {}_3N_3\xi$, $y(-x) = N\xi$, $y(0) = \Theta A$, $y(x) = (N)(\xi)$, $y(x_3) = {}_3(N)_3(\xi)$

$y(0) = |-x_3| = a = 1$, $y(-x_3) = e^{-1}$; $\boxed{y(x) = y = e^{x} \;\Leftrightarrow\; x(y) = x = \ell n\, y}$

Logarithmische Kurve

(vgl. Fig. 103, LMG VII, 372)

LMG VII, 360 f

Hierbei schicke ich die Lösung des Problems von Galilei bezüglich der wahren Figur einer hängenden Kette oder eines hängenden Seils, ..., wie aus der beigefügten Figur und Erklärung zu sehen ist. ...
... Die logarithmische Linie, um sie dann zu zeichnen, wird gefunden durch die Ermittlung beliebig vieler mittlerer Proportionalen, von denen eine (Fig. 96) $N\xi$ oder $(N)(\xi)$ ist zwischen ΘA und ${}_3N_3\xi$ oder ΘA und ${}_3(N)\,{}_3(\xi)$. Das einzige habe ich verschwiegen, was ${}_3N_3\xi$ zu ΘA, oder was dasselbe ist, ΘA zu ${}_3(N)\,{}_3(\xi)$ für eine Proportion, $\aleph$ zu $\beth$, haben, ... Es verhalten sich aber die 3 Linien ${}_3N_3\xi$, ΘA und ${}_3(N)_3(\xi)$ wie diese drei Zahlen: 0,3678794 , 1.0000000 , 2.7182818.

Bemerkung $\quad b = {}_3N_3\xi\,,\ \ y = b^x$ $\quad$ (vgl. Fig. 103, LMG VII, 372)

$$ {}_3N_3\xi : \Theta A \equiv \Theta A : {}_3(N)_3(\xi) \equiv \aleph : \beth \ ; \quad {}_3N_3\xi : \Theta A : {}_3(N)_3(\xi) \equiv b : 1 : b^{-1}$$
$$0{,}3678794 : 1.0000000 : 2.7182818 \equiv e^{-1} : 1 : e$$

Für die Berechnung von $e = 2.718\ldots$ siehe die Reihe für e^x-1 in "De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae ...", Satz 47, Hrsg.: *E. Knobloch*, Springer Spektrum, 2016 und
O. Hamborg: "Erstes (Roh-)Material zum Projekt: Historisch orientierter Mathematik-"Brückenkurs" – nicht nur für Anfänger", www.hamborg-berlin.de/interessen/Rohmaterial.pdf, 2005

... Diejenigen, die die neue Analysis verachten und für ein Späßchen halten, können ihr Heil an diesem Problem versuchen; wiewohl nunmehr nach dargestellter Lösung nichts leichter ist für den, der den Kalkül versteht, als den Grund zu finden; aber die Lösung selbst zu finden, soll einer wohl bleiben lassen, der nicht meinen oder einen äquivalenten Kalkül hat.

Konstruktion der "Funktionswerte" **1.** $-x = \ell n(y),\ e^{-1} \le y \le 1$ $\quad$ **2.** $y = e^{-x},\ 1 \ge x \ge 0$
mittels der Kettenlinie $\quad z = \tfrac{1}{2}\left(y + y^{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right)$

Kettenbreite: $C(C) = 2\Theta N = 2|-x| = 2x = 2\Theta(N)$ $\quad$ (siehe dazu auch LMG VII, 370)

Kettenhöhe: $NC = (N)(C) = \Theta B = \tfrac{1}{2}\big(N\xi + (N)(\xi)\big) = \tfrac{1}{2}\left(y + y^{-1}\right) = z\ ;\ \ \Theta B = \Theta R$

$$\Theta A = \sqrt{N\xi \cdot (N)(\xi)} = 1\ ;\quad \psi\omega = \widehat{CA(C)} = 2\widehat{AC} = y^{-1} - y$$

Bogenlänge: $\widehat{AC} = AR\ ;\ \ \Theta R - AR = N\xi = y = e^{-x}\ ,\ \ \Theta R + AR = (N)(\xi) = y^{-1} = e^{x}$

1. Vom Numerus $y = e^{-x}$ zum Logarithmus $-x = \ell n(y)$ und **2.** umgekehrt.

1.	$N\xi = \Theta\omega = y$	$\mapsto$	$\frac{1}{y}$	$=$	y^{-1}	$=$	$\Theta\psi$	$=$	$(N)(\xi)$
	$\Theta\omega,\ \Theta\psi = y, y^{-1}$	$\mapsto$	z	$=$	$\frac{1}{2}\left(y+y^{-1}\right)$	$=$	$\frac{1}{2}\big(N\xi+(N)(\xi)\big)$	$=$	ΘB
	$\Theta B = z$	$\mapsto$	$\underline{\lvert -x\rvert}$	$=$	x	$=$	$\frac{1}{2}C(C)$	$=$	$\underline{\Theta N}$
2.	$\Theta N = \lvert -x\rvert$	$\mapsto$	z	$=$	$\frac{1}{2}\left(y+y^{-1}\right)$	$=$	NC	$=$	ΘB
	$\Theta B = z$	$\mapsto$	$z, \sqrt{z^2-1}$	$=$	$\frac{1}{2}\left(y+y^{-1}\right), \frac{1}{2}\left(y^{-1}-y\right)$	$=$	$\Theta B, \frac{1}{2}\psi\omega$	$=$	$\Theta R, AR$
	$\Theta R,\ AR = z, \sqrt{z^2-1}$	$\mapsto$	$\underline{y}$	$=$	$z - \sqrt{z^2-1}$	$=$	$\Theta R - AR$	$=$	$\underline{\Theta\omega = N\xi}$