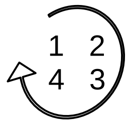
Ein bilateraler Symmetriealgorithmus zur quaterniären Gleichverteilung der ersten 4^n natürlichen Zahlen

A $\quad \underline{\underline{n = 1}}$

1	2
4	3

Zahlenschema I

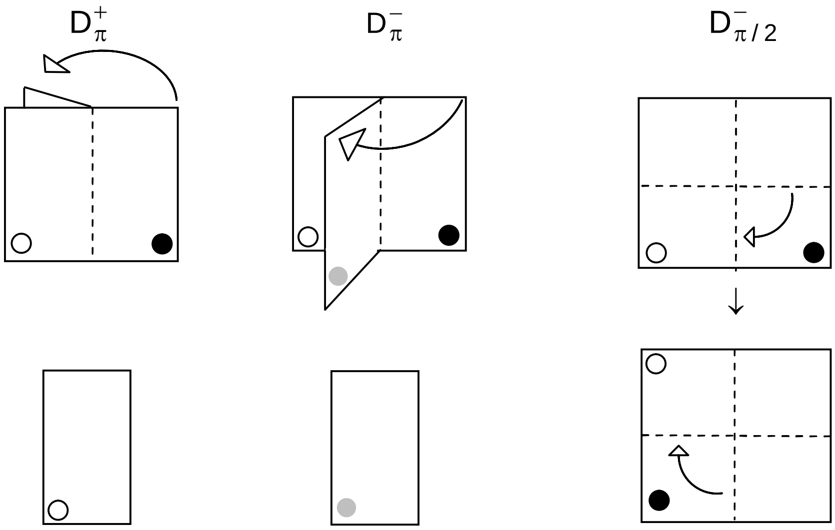
Die obigen vier Zahlen sind in zyklischer Weise angeordnet, was sich z.B. an Hand einer doppelseitig beschreibbaren rechteckigen Fläche folgendermaßen herstellen läßt:



Um die Ausgangssituation bezüglich des Betrachters eindeutig festzulegen, wird zunächst ein "rechts unten" durch eine entsprechende Markierung auf einer Seite bestimmt. Dann werden zwei Operationen, O_- und O_+, definiert, die die Plazierung der Zahlen mittels einer binären Zuordnung bestimmen. Diese zwei, später auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ anzuwendenden Operationen O_- und O_+ werden mit Hilfe zweier Faltungen D_π^+ bzw. D_π^-, die als Drehungen um 180° angesehen werden können und einer Drehung $D_{\pi/2}^-$ um 90° und definiert durch die Verkettungen

$$O_- = D_\pi^- \bullet D_{\pi/2}^- \quad \text{und} \quad O_+ = D_\pi^+ \bullet D_{\pi/2}^-,$$

wobei an Hand eines Blattes Papier als bilaterale Ebene wie folgt vorzugehen ist:



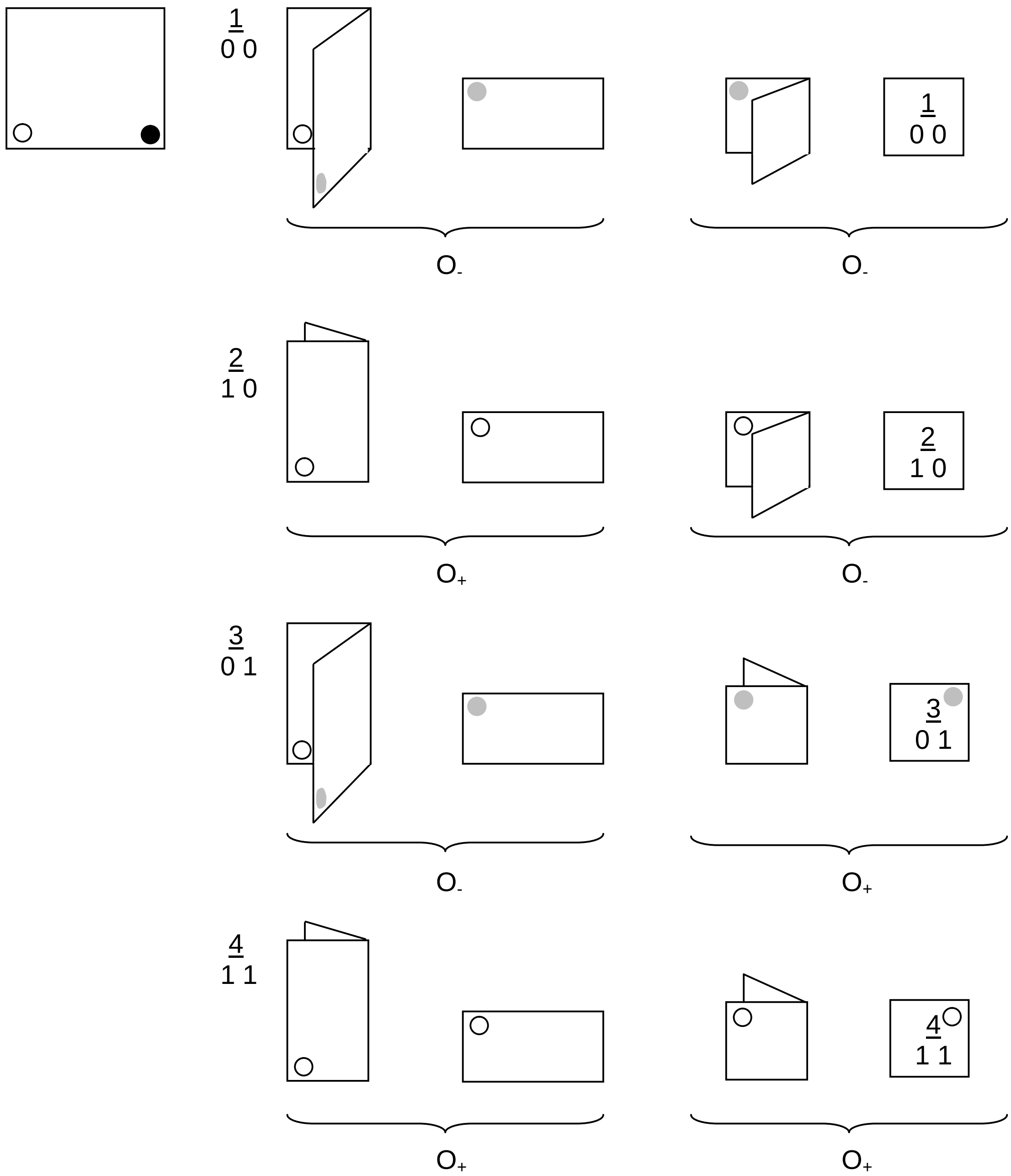
● = "rechts unten" legt auch ○ = "links unten" und die "Vorderseite" fest

Mit der Zuordnung der Zahlen 1, .. , 4 zu entsprechenden Verknüpfungen der zwei Operationen O_+ und O_-

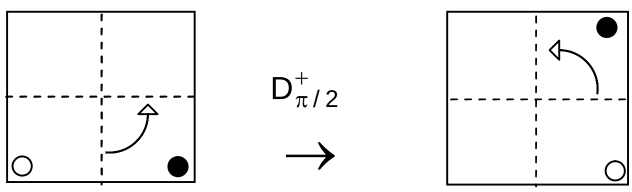
$$1 \leftrightarrow 00 = -\ - \leftrightarrow O_- \bullet O_-$$
$$2 \leftrightarrow 10 = +\ - \leftrightarrow O_+ \bullet O_-$$
$$3 \leftrightarrow 01 = -\ + \leftrightarrow O_- \bullet O_+$$
$$4 \leftrightarrow 11 = ++ \leftrightarrow O_+ \bullet O_+$$

ergeben sich für

die zugeordneten "Handgriffe" mit anschließender Beschriftung Zahlen gemäß



Bem.: Später wird noch der Fall angesprochen, wenn $D^+_{\pi/2}$ anstelle des bereits verwendeten $D^-_{\pi/2}$ betrachtet wird:



Sind auf diese Weise die durch die Faltungslinien getrennten 4 Felder beschriftet, erscheint dem Betrachter der "Vorderseite" das folgende Bild I und nach entsprechender Eintragung nur der Einsen Farbgestalt I.

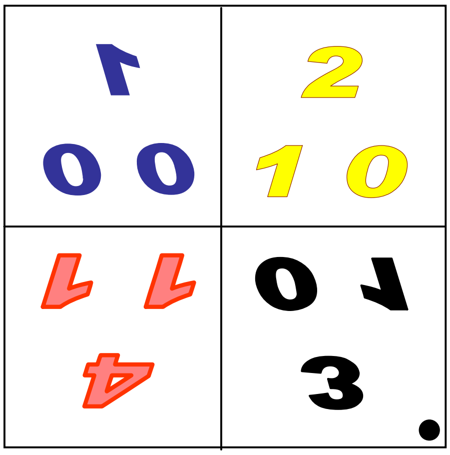
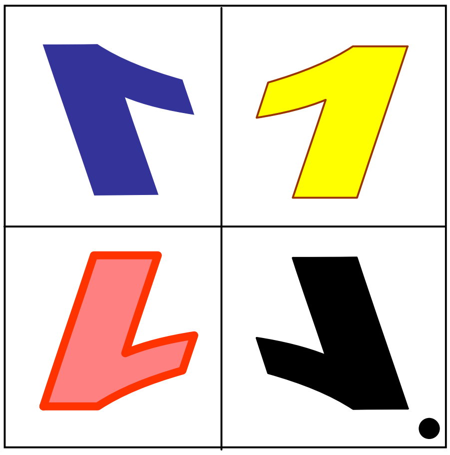


Bild I



Farbgestalt I

Man sieht z.B. in
Farbgestalt I: (i) Die auf der gleichen Seite diagonal eingetragenen gegenüberliegenden Figuren lassen sich durch eine Drehung um 180° zur Deckung bringen,

während für

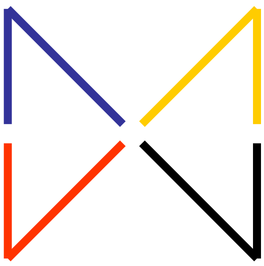
(ii) die bezüglich einer Faltungslinie gegenüberliegenden Figuren durch Spiegelung auseinander hervorgehen.

Die farbliche Ausstattung der Figuren 1 ist unter der Voraussetzung (die noch zu begründen oder zu verändern ist) vorgenommen worden, daß

(i) diejenigen der Vorderseite besser als 1 identifiziert werden als die der Rückseite und deshalb blasser erscheinen können;

(ii) 1 bzw. (das ist die 1 für den Betrachter der Rückseite) besser als 1 bzw. erkannt wird, als das gedrehte bzw. .

Wenn auch die obige Annahme bezüglich der Erscheinungsformen der Figuren nicht sofort einsichtig ist, so könnte man doch im Hinblick auf kompliziertere asymmetrische Gebilde zunächst davon ausgehen, daß eine Spiegelung der Vorstellungskraft im allgemeinen mehr Mühe mach als eine Drehung. Das Symbol mit den vier an Intensität zu- bzw. abnehmenden Farbelementen (wie ich es nennen möchte)



wird eine fundamentale und entscheidende Rolle bei den Symmetriebetrachtungen der hier vorgestellten Zahlenanordnung spielen.

B <u>n = 2</u>

Die Figur **1** läßt sich nicht mit ihrem Spiegelbild, z.B. dieser **1**, durch Verschieben oder Drehen in dieser Blattebene zur Deckung bringen. Eine derartige Eigentümlichkeit, die auch an einer Hand (griech. ÷åßñ *cheir*) anzutreffen ist, wird z.B. in der Molekül- und Elementarteilchenphysik Chiralität genannt. Während in die 4^n Teile einer Ebene die Symbole 0 und 1 eingetragen wurden, war es für die Zahlendarstellung zunächst günstiger, die beiden achiralen - und + zu benutzen, um gemäß der mathematischen Definition direkt auf die Links- und Rechtsdrehungen bei O_+ und O_- hinzuweisen. So werden also auch die ersten 16 natürlichen Zahlen entsprechend dieser Form angegeben.

1 = - - - -	5 = - - + -	9 = - - - +	13 = - - + +
2 = + - - -	6 = + - + -	10 = + - - +	14 = + - + +
3 = - + - -	7 = - + + -	11 = - + - +	15 = - + + +
4 = + + - -	8 = + + + -	12 = + + - +	16 = + + + +

Nach den diesen Zahlen entsprechenden Hintereinander-Ausführungen und analogen Beschriftungen der jetzt 4 Operationen erhält man das Schema

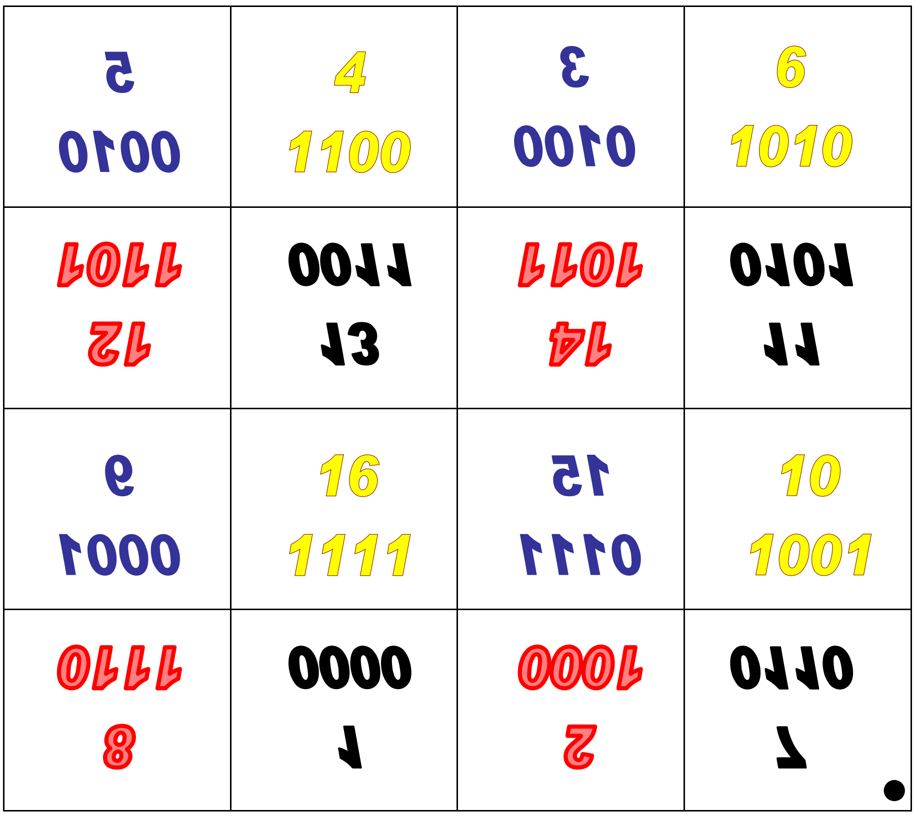
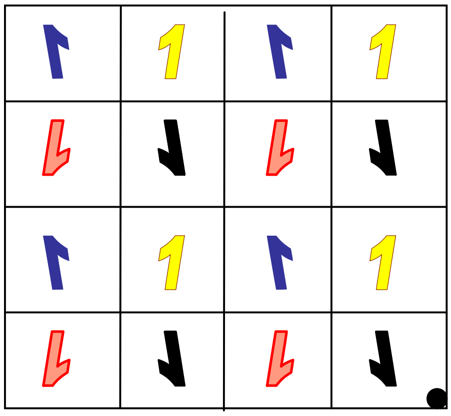


Bild II

Das so erhaltene bilaterale Schema zeigt (i) 16 verschiedene Zahlen in (ii) 4 verschiedenen Gestalten und (iii) vier verschiedenen Farben. Es wird nun in Form zweier "einseitiger" Flächen dargestellt.

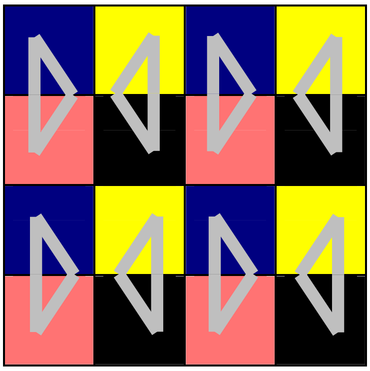
5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

Zahlenschema II

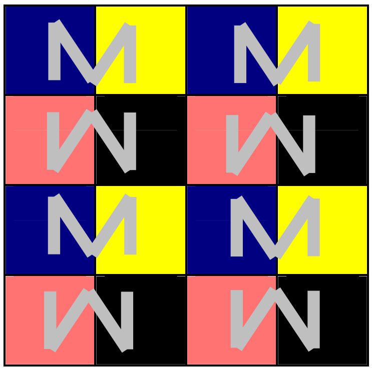


Farbgestalt II

Während also im Zahlenschema von jeglicher Erscheinungsform der 16 verschiedenen Elemente abgesehen wird, so gilt für das für jegliches Zählen in der Farbgestalt. Diese gibt aber nun "Anweisungen" in Form von Gestalten, die durch Kombination ihrer Elemente entstehen, auf farblichem Hintergrund.



Graphik Ia

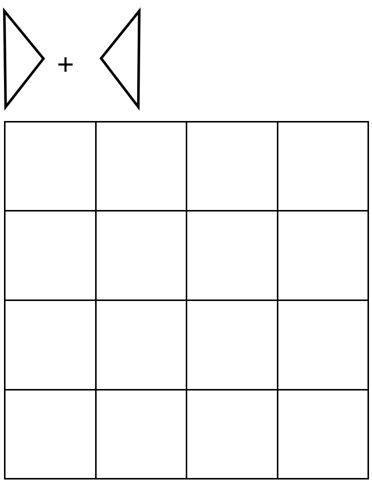


Graphik Ib

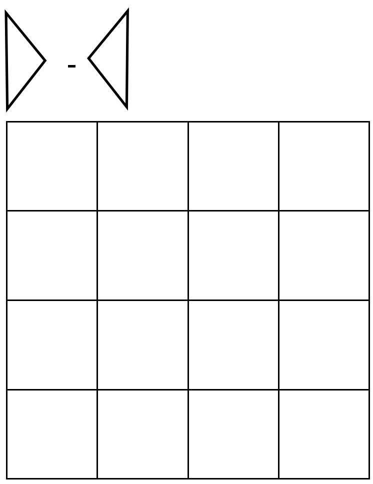
Die farblosen Gestalten aus Graphik Ia, Ib werden benutzt um anzuzeigen, wie die Zahlen benachbarter Felder addiert oder subtrahiert werden sollen.

I lateral

(i)



(ii)



Lateralkombinationen