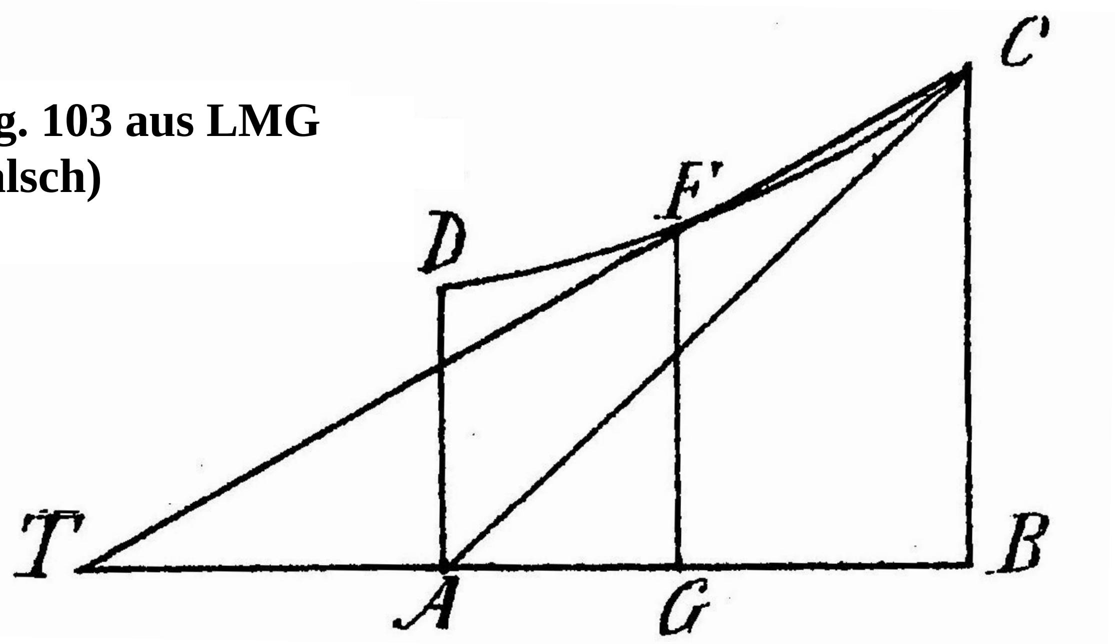
Das Kettenproblem
in Briefen von Leibniz an v. Bodenhausen (ab 1691)

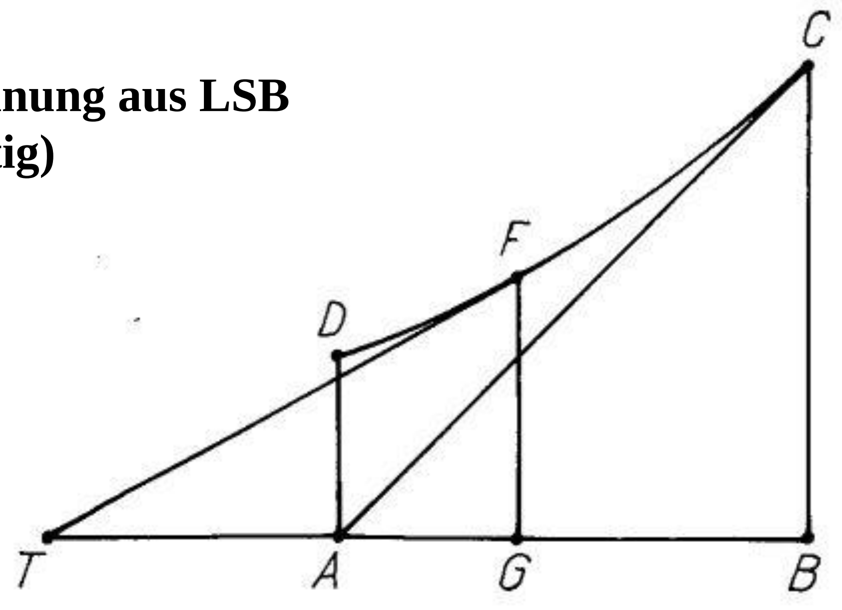
Zur Exponential- und Differentialgleichung der logarithmischen Kurve

Fig. 103 aus LMG (falsch)



Zu korrigieren: TF $\nparallel$ FC, denn
logar. Kurve : $\overset{\frown}{DFC}$,
Tangente in F: TF,
in C: AC.

Zeichnung aus LSB (richtig)



AB = BC = 1 , BG = x
DA = b , FG = y , $\boxed{y = b^x}$

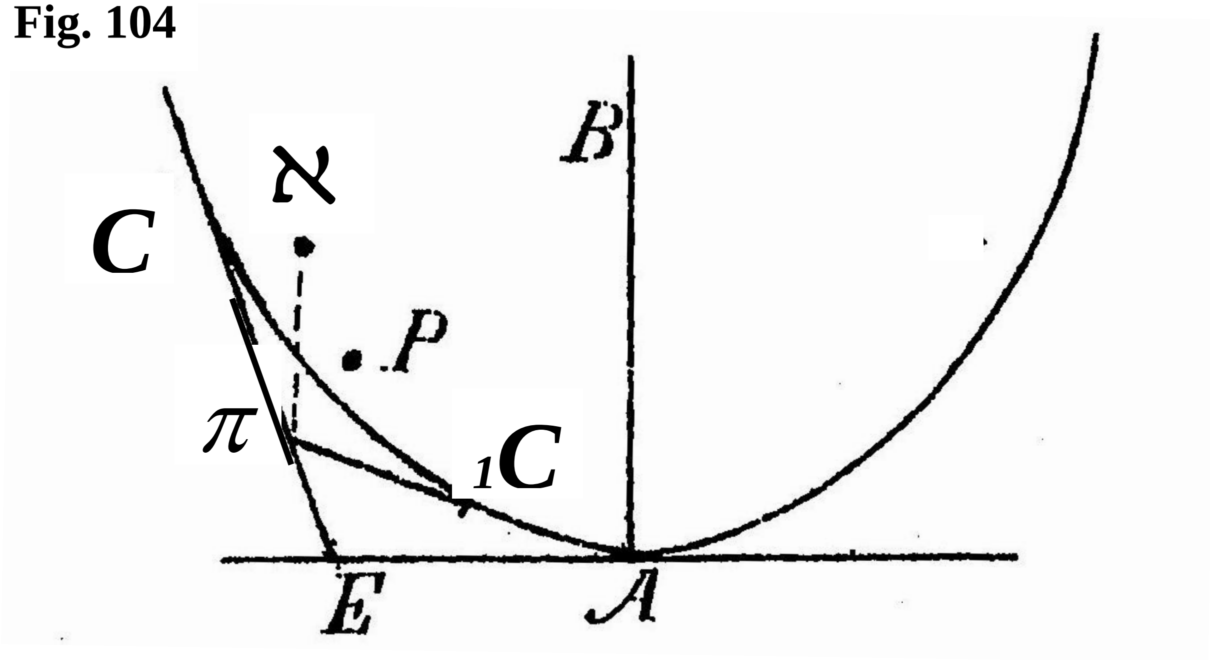
TG = a = AB $\Rightarrow \dfrac{TG}{GF} = \dfrac{a}{y} = \dfrac{dx}{dy} \Rightarrow a\,dy = y\,dx \Rightarrow \boxed{dy = y\,dx}$

Was die begehrte Gleichung der logarithmischen Kurve betrifft, dazu diene folgendermaßen dies:
Gesetzt AB sei = BC, und = 1, also dass a der Parameter der logarithmischen [Kurve] ist, und BG sei x, FG sei y, und DA sei b, so ist $y = b^x$, welche eine exponentiale transzendente Gleichung[1] ist; es sind aber die exponentialen Gleichungen von allen transzendenten die perfektesten, wenn man sie erlangen kann.
Es haben aber BC und AD oder 1 und b immer eine beständige Proportion zusammen, so in allen logarithmischen Kurven bleibet, und die Verbindung[sgerade] AC berührt die Kurve in C.
Um aber die transzendenten [Kurven] auch durch Differentialgleichungen auszudrücken, kann man es so tun:
Die Natur der logarithmischen [Kurve] bringt mit sich, dass, – wenn ein beliebiger Punkt F genommen und von dort die Tangente TF ausgezogen ist und sie die Asymptote BA in T trifft –, die Gerade GT konstant bzw. immer gleich demselben ist, nämlich dem Parameter AB oder BC oder 1 selbst. Deshalb, wenn wir nun BC oder 1 a nennen, wird TG bzw. a zu GF bzw. y werden wie dx zu dy, bzw. es wird die Gleichung $a\,dy = y\,dx$ entstehen, bzw. es wird, gesetzt a = 1, [Gl.] $dy = y\,dx$ entstehen, die diejenige Differentialgleichung ist, die die Natur der logarithmischen Kurve ausdrückt; sie ist von größter Einfachheit, wie denn gewiss von allen transzendenten die logarithmische [Kurve] die einfachste ist.

[1] aequatio transcendens exponentialis

Die Grundannahme der Kettenkurve

Fig. 104



ℵπ ⊥ EA
PE ⊥ EA
Cπ, π₁C, EA = Tangenten an C₁CA in C, ₁C, A
EA · Bogenlänge AC = Moment des Bogens AC bzgl. AB-Achse

Die Grundannahme, um die Natur der Kettenkurve auf eine Gleichung zu bringen, ist diejenige, die Huygens, P. Pardies und andere[1] vorlängst bezüglich der Eigenschaft der Kurventangenten angemerkt haben, dass nämlich die Tangenten Cπ (Fig. 104) und ₁Cπ einander treffen im Punkt π, der senkrecht steht unter ℵ, dem Schwerezentrum des Bogens C₁C.

Wenn daher AE die Tangente des Scheitels A ist, und die Tangente des Punktes C die Tangente des Punktes A bei E antrifft, so muss E senkrecht stehen unter dem Schwerezentrum P des Bogens AC, d. h. AE ist der Abstand des Schwerezentrums des Bogens AC von der Achse AB, oder AE mal AC ist das Momentum des Bogens bzw. der Kette AC von der Achse her.
Aufgrund dieser Überlegung kann man nun zu der Differentialgleichung kommen, durch deren Verfolgung man endlich alle die von mit gesetzten Theoreme herausbringen kann.

[1] Hugenius: wohl zuerst in seinem Jugendwerk "De catena pendente" von 1646 (Huygens, Oeuvres 11, S. 37 f.).
Pardies: vgl. I. G. Pardies, La statique, 1673, cap. LXXIII f.

Erstes (Roh-)Material zum Projekt:

Historisch orientierter Mathematik-"Brückenkurs"

nicht nur für Anfänger

Programm:

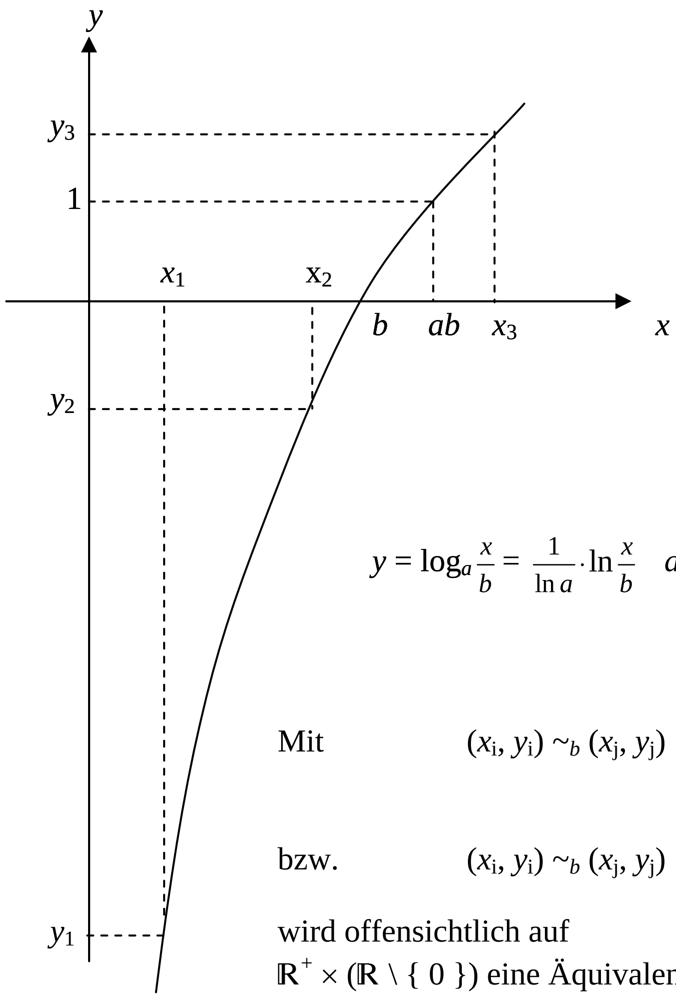
Darstellung der *Quadratura Arithmetica* von G. W. Leibniz in moderner Schreibweise

Diskussion der Klarheit, Eindeutigkeit usw. von Begriffen
und der Genauigkeit, Strenge usw. von Beweisen

Sammlung von Übungsaufgaben aus diesem Werk von Leibniz

Otto Hamborg
Fon/Fax 030 – 313 67 65
E-Mail hamborg-berlin@t-online.de
November 2005

Zur "logarithmischen Kurve" in Leibniz' *Quadratura Arithmetica*



$$y = \log_a \frac{x}{b} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln \frac{x}{b} \qquad a, b > 0$$

Mit $\qquad (x_i, y_i) \sim_b (x_j, y_j) :\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x_i}{b}\right) = \left(\frac{x_j}{b}\right)^{\frac{y_i}{y_j}}$

bzw. $\qquad (x_i, y_i) \sim_b (x_j, y_j) \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x_i}{b}\right)^{\frac{1}{y_i}} = \left(\frac{x_j}{b}\right)^{\frac{1}{y_j}}$

wird offensichtlich auf $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \})$ eine Äquivalenzrelation " $\sim_b$ " definiert.

Die Äquivalenzklassen sind gerade die Punktmengen

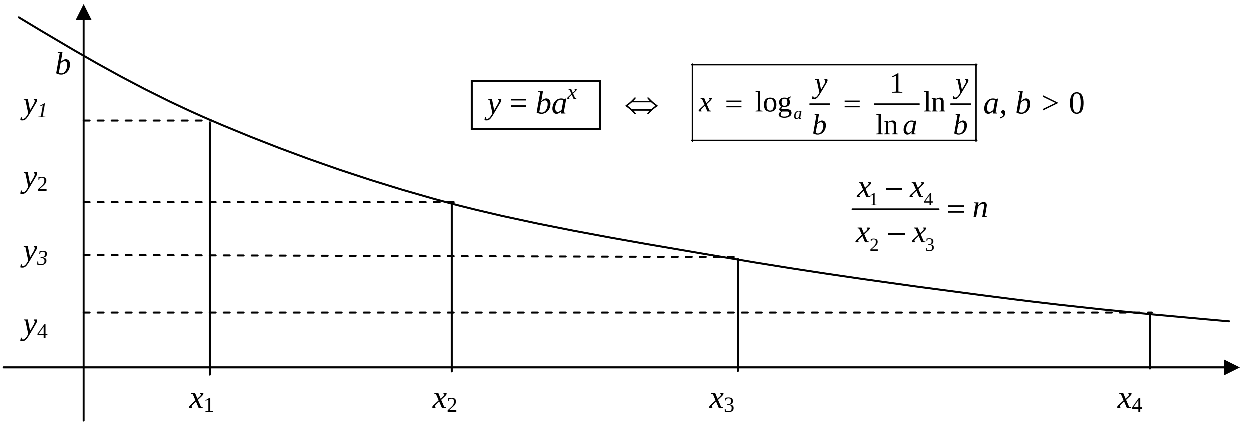
$$\mathbf{L}_{\boldsymbol{ab}} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left(\tfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{y}} = a,\ a > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x = ba^y,\ a > 0 \right\} = \begin{cases} \left\{ (x, y) \,\middle|\, y = \log_a \left(\tfrac{x}{b}\right),\ a > 0,\ a \neq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \\ \{(b, y)\} \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}), \quad a = 1 . \end{cases}$$

Wegen $(ab, 1) \in \mathrm{L}_{ab}$ erhält man für $a \neq 1$ eine Beschreibung der von G. W. Leibniz als <u>Logarithmische Kurven</u> bezeichneten Punktmengen durch

$$\boxed{\mathbf{L}_{\boldsymbol{ab}} = [(ab, 1)]_{\sim_b}} \ .$$

Bemerkung: Es ist noch **!?** der Punkt $(b, 0)$ zu ergänzen.

Zur Logarithmischen Kurve
(Exponential- bzw. Logarithmusfunktion)



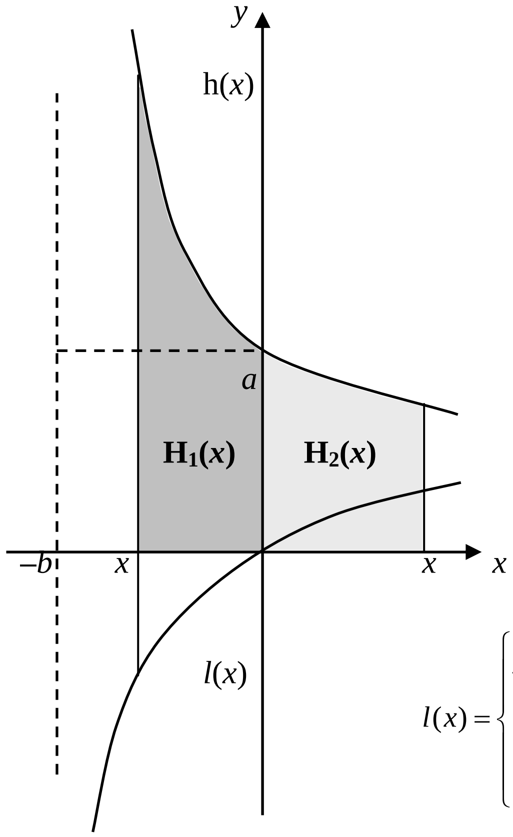
$$\boxed{y = ba^x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_a \frac{y}{b} = \frac{1}{\ln a} \ln \frac{y}{b}} \; a, b > 0$$

$$\frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_3} = n$$

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{ba^{x_1}}{ba^{x_4}} = a^{x_1 - x_4} = a^{n(x_2 - x_3)} = \frac{b^n}{b^n} \cdot \frac{a^{x_2 n}}{a^{x_3 n}} = \frac{\left(ba^{x_2}\right)^n}{\left(ba^{x_3}\right)^n} = \left(\frac{y_2}{y_3}\right)^n$$

$$\boxed{\frac{y_1}{y_4} = \left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{\frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_3}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^{\frac{1}{x_1 - x_4}} = \left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_3}}}$$

Satz 44



Hyperbel $\mathrm{h}(x) = \dfrac{ab}{b+x}$ mit a, $b > 0$

Logarithmische Kurve $= l(x) = a \log_v \dfrac{b+x}{b}$

$$l(x) = \begin{cases} -\mathrm{H}_1(x) = -\int_x^0 h(x)dx & \text{für } x \in \,]-b,\, 0] \\ \mathrm{H}_2(x) = \int_0^x h(x)dx & \text{für } x \in [0,\, \infty[\end{cases}$$

Nach Satz 129 des Buches über die Hyperbel von Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) gilt Fläche $\boldsymbol{l(x) = p \log_u \dfrac{b+x}{b}}$, d. h. Proportionalität der Hyperbelflächen und Logarithmen.

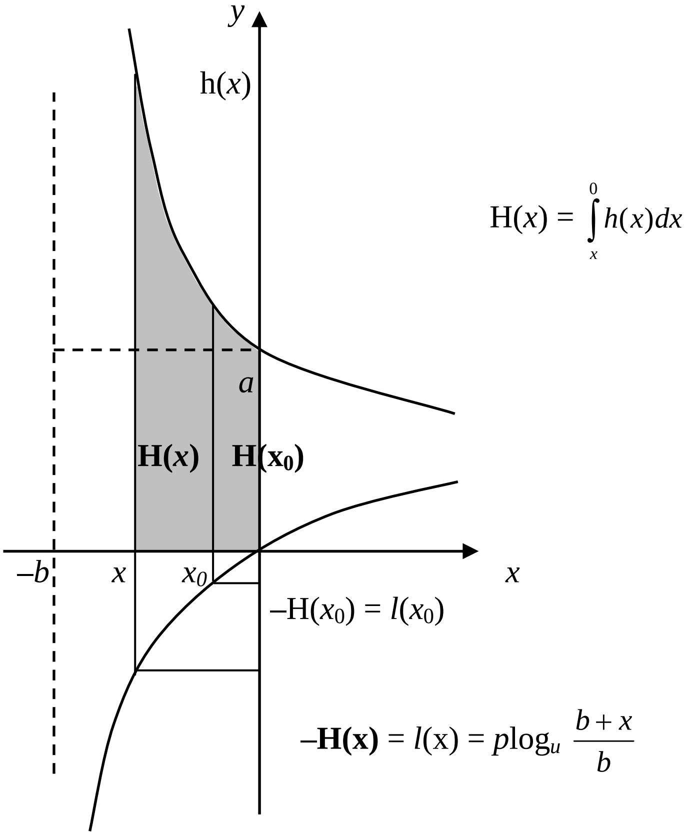
Mit $\mathrm{h}(x) = a \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{b}} \underset{\text{Satz 26}}{=} a\left(1 - \dfrac{x}{b} + \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{x^3}{b^3} \pm \cdots\right)$ folgt noch Satz 25, 29 (summandenweise Integration)

und der Wahl $a = p$ für p[*]: $a \log_v \dfrac{b+x}{b} = l(x) = \int_0^x h(x)dx = a\left(x - \dfrac{x^2}{2b} + \dfrac{x^3}{3b^2} - \dfrac{x^4}{4b^3} \pm \cdots\right)$, also:

Satz 44 $\boxed{\log_v \dfrac{b+x}{b} = x - \dfrac{x^2}{2b} + \dfrac{x^3}{3b^2} - \dfrac{x^4}{4b^3} \pm \cdots}$ $\boxed{= b \ln\left(1 + \dfrac{x}{b}\right),\ \left|\dfrac{x}{b}\right| < 1}$ b · ln v = 1.

[*] Für einen gegebenen Logarithmus zur Basis u lässt sich eine Basis v finden, sodass gilt: $p\, log_u\, x = a \log_v x$ für gegebene a, p. Setze $v = u^{\frac{a}{p}}$, d. h. $\dfrac{a}{p} = \log_u v = \dfrac{\log_u x}{\log_v x}$.

Satz 45



Satz 45 $\boxed{\begin{array}{ll} \text{i)} & \lim\limits_{x\to -b} \mathrm{H}(x) = \infty \\ \text{ii)} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \infty \end{array}}$.

Beweis: **i)** Aufgrund der Proportionalität der Hyperbelflächen und Logarithmen erhält man für $-b < x < x_0 < 0$

$$-\mathrm{H(x)} = l(\mathrm{x}) = p\log_\mathrm{u} \frac{b+x}{b} \Rightarrow \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}(x_0)} = \frac{\log_u \frac{b+x}{b}}{\log_u \frac{b+x_0}{b}} \Rightarrow \mathrm{H}(-b) = p\left|\log_u 0\right| = \infty \ .$$

Noch zu zeigen:

Die senkrechte Gerade durch $x = -b$ ist eine Asymptote für $y = l(x) = p\log_u \frac{b+x}{b}$, d. h.

$$\bigwedge_{\substack{-b<x_0<0 \\ y_0<0}} \bigwedge_{M>0} (y_0 = l(x_0) \wedge M > |y_0| \Rightarrow \bigvee_{-b<x<x_0} |l(x)| > M) \ .$$

Wähle dazu ein $y_N < 0$ mit $|y_N| > M$ für ein $M > |y_0|$. Dann gibt es ein x_N mit

$$\frac{b+x_N}{b} = \left(\frac{b+x_0}{b}\right)^{\frac{y_N}{y_0}} \underset{\text{Def. } l(x)}{\Leftrightarrow} y_N = l(x_N) \wedge y_0 = l(x_0) \ .$$

Aufgrund der Voraussetzung ist $\frac{y_N}{y_0} = \frac{|y_N|}{|y_0|} > 1$ und $0 < \frac{b+x_0}{b} < 1$ und damit auch $0 < \frac{b+x_N}{b} < \frac{b+x_0}{b}$,

d. h. $\underline{-b < x_N < x_0}$ sowie $\underline{|l(x_N)|} = |y_N| \underline{> M}$.

ii) Folgt aus i) $\mathrm{H}(-b) = \infty$ und aus dem zu Satz 42 Gesagten, dass nämlich die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ den Flächeninhalt $\mathrm{H}(-b)$ ausdrückt.

Satz 46 (Anwendung von Satz 6)

Logarithmische Kurve (Exponentialfunktion)

Voraussetzung

$y = \mathrm{f}(x)$, $\mathrm{f}(0) = b$

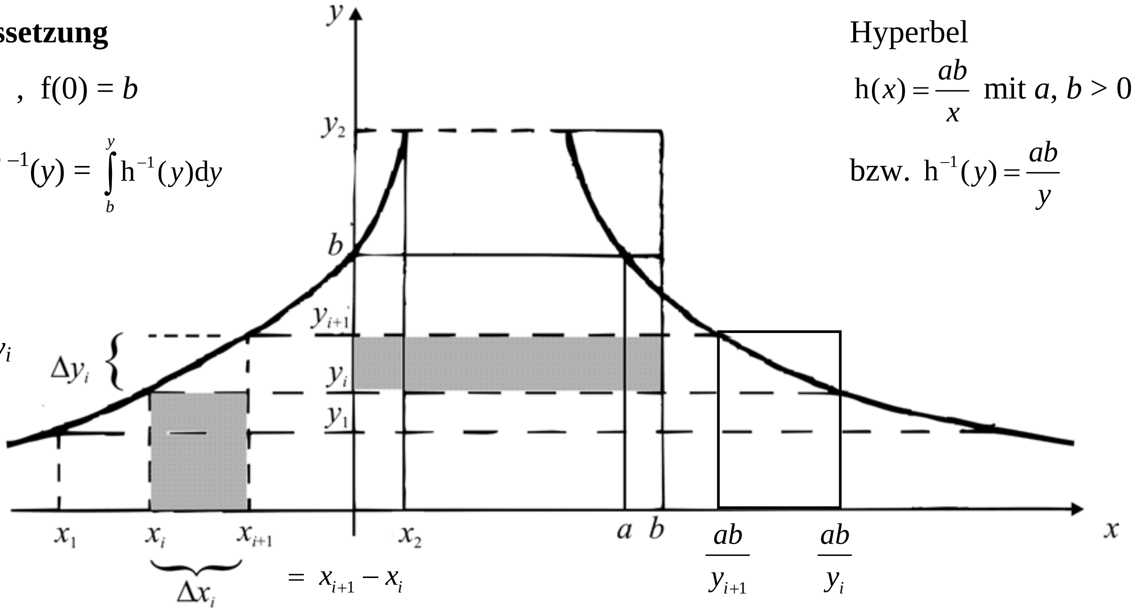
$ax = a\mathrm{f}^{-1}(y) = \int_b^y \mathrm{h}^{-1}(y)\mathrm{d}y$

Hyperbel

$\mathrm{h}(x) = \frac{ab}{x}$ mit $a, b > 0$

bzw. $\mathrm{h}^{-1}(y) = \frac{ab}{y}$

$y_{i+1} - y_i$



Satz 46 $\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \;=\; b\left(y_2 - y_1\right) \;=\; b\left(\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)\right)}$ $\boxed{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \;=\; b^2}$

Beweis: $a\,\Delta\,x_i \;=\; \int_{y_i}^{y_{i+1}} \mathrm{h}^{-1}(y)\mathrm{d}y$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow$ $a\,\Delta\,x_i \;=\; \frac{ab}{y_{i+1}}\Delta\,y_i$ näherungsweise für $\Delta\,y_i \;\to\; 0$

$\Rightarrow$ $a\,\Delta\,x_i \;=\; \frac{ab}{y_i}\Delta\,y_i$ näherungsweise für $\Delta\,y_i \;\to\; 0$

$\Rightarrow$ $b\,\Delta\,y_i \;=\; y_i\,\Delta\,x_i$

$\Rightarrow$ $b(y_2 - y_1) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b\,\Delta\,y_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta\,x_i \xrightarrow{\mathrm{n}\to\infty} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{F}_a$,

da für f^{-1} angenommen wird

$y_{i+1} - y_i \;=\; \Delta\,y_i \;\to\; 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{f}^{-1}(y_{i+1}) - \mathrm{f}^{-1}(y_i) \;=\; x_{i+1} - x_i \;=\; \Delta\,x_i \;\to\; 0.$

$$\int_{x_1}^{0} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \;=\; b\left(\mathrm{f}(0) - \mathrm{f}(x_1)\right) \xrightarrow{x_1 \to -\infty} b\,\mathrm{f}(0) \;=\; b^2.$$

Bemerkung: $\delta\overline{x} = \int_b^y h^{-1}(y)dy \Rightarrow \delta\Delta\overline{x}_i = \frac{ab}{y_i}\Delta y_i \Rightarrow \frac{ab}{\delta}\Delta y_i = y_i\Delta\overline{x}_i$

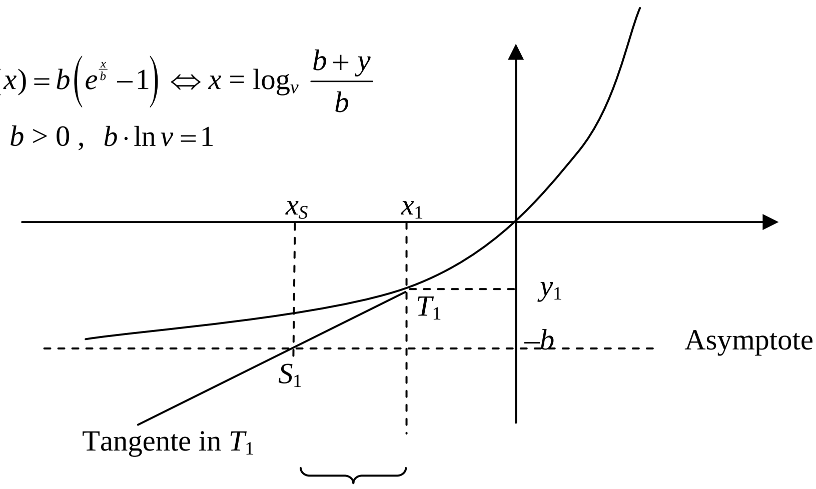
$\Rightarrow$ $\frac{ab}{\delta}\left(y_2 - y_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{ab}{\delta}\Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta\overline{x}_1 \xrightarrow{n\to\infty} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}\left(\overline{x}\right)d\overline{x} = \mathrm{F}_\delta$

Also: $\frac{\mathrm{F}_a}{\mathrm{F}_\delta} \;=\; \frac{\delta}{a}$

Die von allen am meisten bewundernswerte Eigenschaft: die konstante Subtangente (der logarithmischen Kurve).
Z. 2746, Satz 46, Scholium

$y = \mathrm{f}(x) = b\left(e^{\frac{x}{b}} - 1\right) \Leftrightarrow x = \log_v \dfrac{b+y}{b}$

$b > 0\,,\quad b \cdot \ln v = 1$



Beh.: $b = |\,x_S - x_1\,|$ = Subtangente bzgl. T_1

Bew.: Gleichung der Tangente in T_1 $\quad \dfrac{y - \mathrm{f}(x_1)}{x - x_1} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{f}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x = x_1} = e^{\frac{x_1}{b}}\,,$

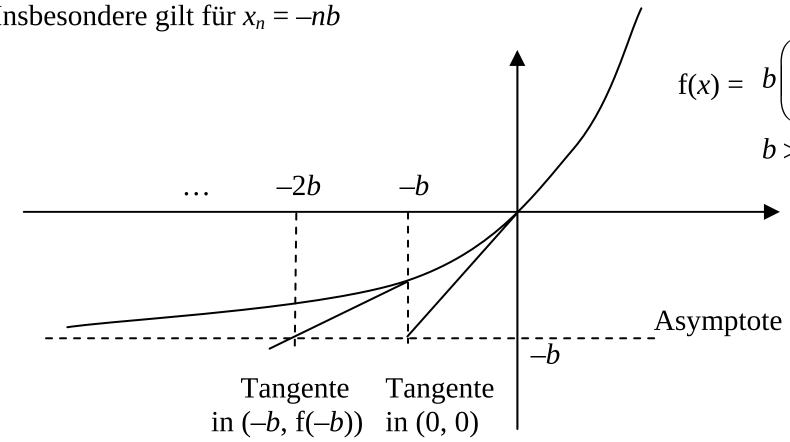
Schnittpunkt S_1 der Tangente mit Asymptote $y = -b$

$$\frac{-b - b\left(e^{\frac{x_1}{b}} - 1\right)}{x_S - x_1} = e^{\frac{x_1}{b}} \Rightarrow \frac{-b}{x_S - x_1} = 1 \Rightarrow b = \left|x_S - x_1\right|.$$

Insbesondere gilt für $x_n = -nb$

$\mathrm{f}(x) = b\left(e^{\frac{x}{b}} - 1\right)$

$b > 0$



Satz 47

Für $\log_u \frac{b+y}{b} = \int_b^y \frac{b}{b+y}\,dy$, siehe Satz 44, gilt

$$\boxed{l(y) := x = \log_u \frac{b+y}{b} \;\Rightarrow\; n(x) := y = p\left(x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \cdots\right)}$$

Beweis: Es wird zunächst gezeigt, dass $\bar{n}(x) = x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \cdots$ eine logarithmische Kurve darstellt, d. h. beschrieben wird durch $\bar{n}(x) = b\left(v^x - 1\right) \underset{\mathrm{Def.}\log_v}{\Leftrightarrow} x = \log_v \frac{b + \bar{n}(x)}{b}$ für eine Basis *v*.

$$\int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x)dx = \int_{x_1=0}^{x_2>0} \left(x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \cdots\right)dx = \frac{x_2{}^2}{2!} + \frac{x_2{}^3}{3!b} + \frac{x_2{}^4}{4!b^2} + \cdots \quad \text{Vor., Satz 25, 29}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b}\int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x)dx = \frac{x_2{}^2}{2!b} + \frac{x_2{}^3}{3!b^2} + \frac{x_2{}^4}{4!b^3} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b}\int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x)dx + x_2 = x_2 + \frac{x_2{}^2}{2!b} + \frac{x_2{}^3}{3!b^2} + \frac{x_2{}^4}{4!b^3} + \cdots = \bar{n}(x_2) \quad \text{Vor.}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x)dx + bx_2 = b\bar{n}(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_1=0}^{x_2>0} \left(\bar{n}(x) + b\right)dx = b\bar{n}(x_2)$$

Mit $g(x) = \bar{n}(x) + b$ folgt wegen $\bar{n}(0) = 0$: $\int_{x_1=0}^{x_2>0} g(x)dx = b\left(g(x_2) - g(0)\right)$.

Die letzte Gleichung gilt für alle $x_2 \in [0, \infty[$ und stellt nach Satz 46 eine notwendige Eigenschaft einer logarithmischen Kurve dar. Für $x_1 \in \,]-\infty, 0]$, d. h. $x_1 < 0$ $x_2 = 0$ wird ein entsprechender Beweis durchgeführt und Leibniz behauptet nun, dass $g(x)$ bzw. $\bar{n}(x)$ eine logarithmische Kurve ist. Die möglicherweise problematische Begründung dafür liefert er in einer gestrichenen Variante: "Dass dies [d. h. $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{f}(x)dx = b\left(\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)\right)$] aber für einen beliebigen auf der Kurve gewählten Punkt K unterhalb von A [hier: K = x_2 oberhalb von A = 0] zutrifft, ist eine Eigenschaft der logarithmischen Kurve, wie es bei ihrer im vorangehenden Satz [46] dargestellten Quadratur gezeigt wurde." Dann sagt er weiter (2815 f. gestrichen): "Und sie kann in der Tat niemals auf eine andere Kurve zutreffen, wie es klar sein wird für den, der diesen Beweis [Satz 46] untersucht, weil alle in ihm verwendeten Aussagen umkehrbar sind; und es kann von dort sofort ein Beweis durch Umkehrung zurechtgelegt werden."

In der späteren "Zusammenfassung der Arithmetischen Quadratur" (1678/80, LMG V, 99-113) benutzt Leibniz zum Beweis von Satz 47 die Methode des Koeffizientenvergleichs bzgl. einer angenommenen Potenzreihe $y = \mathrm{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ unter Verwendung der in Satz 46 bewiesenen funktionalen Identität $\int_0^x y dx = by - bx$, d. h. $\int_0^x \mathrm{f}(x)dx = b\mathrm{f}(x) - bx$.

Bemerkung: Die Zeichen $\int, d$ werden in der " Arithmetischen Quadratur" (1676) nirgends verwendet.