## G. W. LEIBNIZ (1646-1716)

# VORWORT ZUR KLEINEN SCHRIFT ÜBER DIE ARITHMETISCHE QUADRATUR DES KREISES [APRIL-JUNI 1676][1]

Dieses Vorwort (AVII 6, N. 19) gehört zu *Quadraturae Circuli Arithmeticae Pars Prima* [April-Juni 1676] (AVII 6, N. 20) und *Pars Secunda* [Juni-Juli 1676] (AVII 6, N. 28), den Vorarbeiten von der Endfassung der Arithmetischen Kreisquadratur *De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolae* [Juni-September 1676] (AVII 6, N. 51).

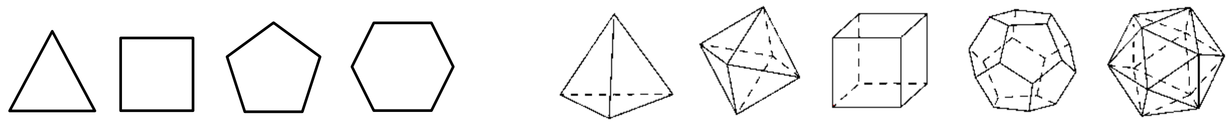
Übersetzung und Textgestaltung (**fett**, g e s p e r r t und <u>unterstrichen</u>) sowie Zeichnungen (außer dem unteren Kreisbild auf S. 5) von Gabriele und Otto Hamborg (2017).

[1] PRAEFATIO OPUSCULI DE QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA in: G. W. Leibniz. *Sämtliche Schriften und Briefe, Siebente Reihe: Mathematische Schriften, Bd. 6 1673-1676. Arithmetische Kreisquadratur (AVII 6, N. 19).* Akademie-Verlag 2012.

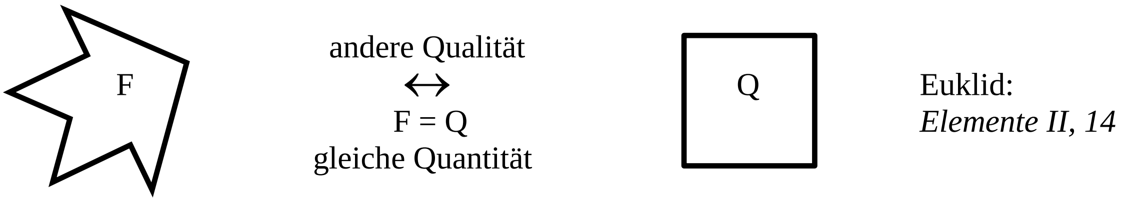
## VORWORT ZUR KLEINEN SCHRIFT ÜBER DIE ARITHMETISCHE QUADRATUR DES KREISES

Da nun das Problem von der Quadratur des Kreises in aller Munde ist und durch die leidenschaftlichen Bemühungen der Forscher sogar bei den Menschen berühmt gemacht wurde, die an der Geometrie ganz und gar unbeteiligt sind, wird es der Mühe wert sein, die Natur des Untersuchungsgegenstandes mit wenigen Worten darzustellen, damit sich zeigt, was von jeder Generation gesucht, was vor uns geleistet, was von uns hinzugefügt wurde und was der Nachwelt zu tun übrig bleibt.

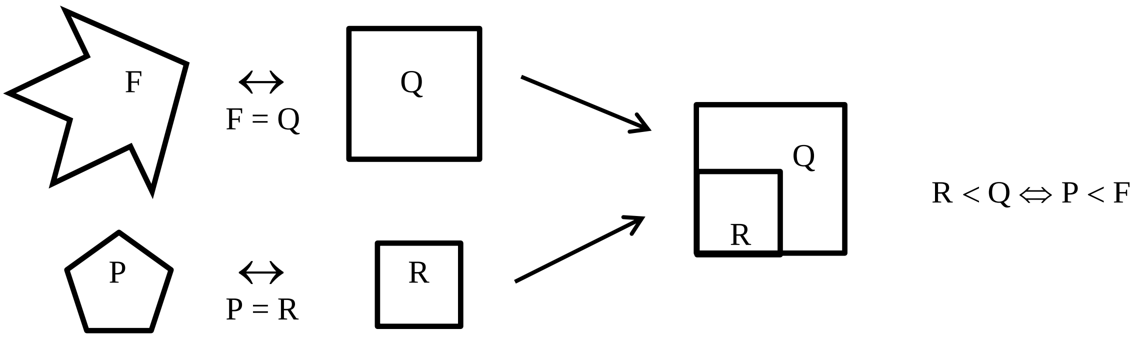
Als Pythagoras und seine Schüler die geradlinigen Elemente der Geometrie vollendeten, die später von Euklid zu einem einzigen Ganzen gestaltet wurden,



und nunmehr das erreicht worden war, dass man zu einer beliebigen gegebenen ebenen geradlinigen Figur ein ihr gleiches Quadrat darstellen konnte,

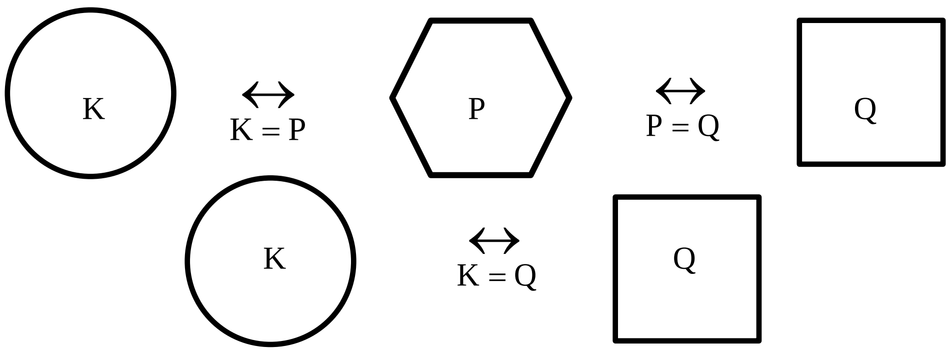



das natürlich von allen geradlinigen Figuren am einfachsten und gewissermaßen das **Maß** der übrigen ist,



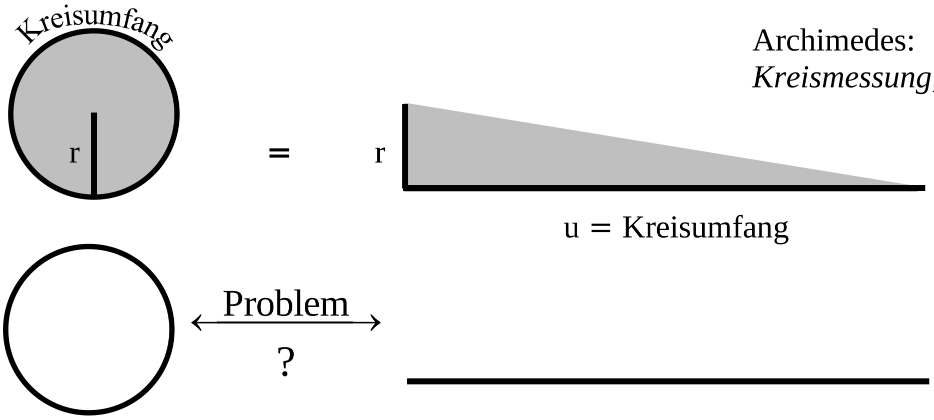

begann man darüber nachzudenken, ob nicht zu einem Kreis eine ihm gleiche geradlinige Figur und deshalb auch ein ihm gleiches Quadrat dargestellt werden könnte.

Und das ist jenes, was gewöhnlich die **Quadratur des Kreises** genannt wird; wenn nämlich ein gewisses Dreieck oder irgendein beliebiges Polygon beschrieben werden könnte, das gleich dem Kreis ist, bestünde jedenfalls auch die Möglichkeit zu einem ihm gleichen Quadrat.

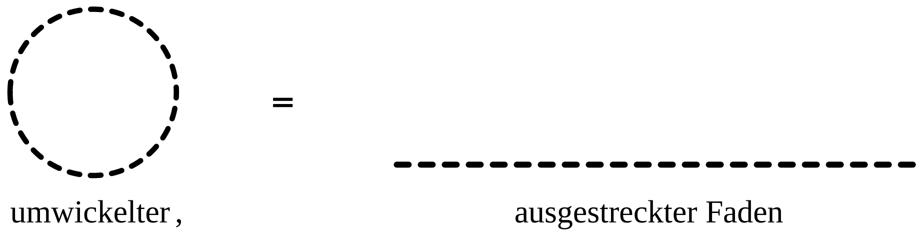


Und da ja Archimedes gezeigt hat, dass das rechtwinklige Dreieck, dessen Höhe der Radius, dessen Grundlinie aber der in eine Gerade ausgestreckte Kreisumfang ist, die Kreisfläche sein wird, würde uns deshalb jemand eine Quadratur liefern, wenn er eine gewisse, dem Umfang des Kreises gleiche Gerade fände.

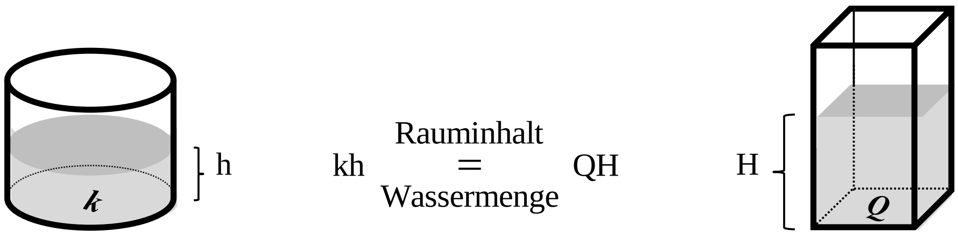
Archimedes:
*Kreismessung, Prop.1*




Hier kommt einigen, die die Erklärung hören, in den Sinn, sich zu wundern, warum die Geometer so lange eine, wie ihnen eben scheint, sehr leichte Sache gesucht haben; denn was ist leichter, als eine dem Kreisumfang gleiche Gerade dadurch zu finden, dass man um einen materiellen Kreis einen Faden legt und diesen danach in gerader Richtung ausstreckt und misst.




Mit demselben Recht könnten sie sagen, dass der Kreis leicht quadriert wird, wenn eine zuerst kreisförmige Wachsmasse danach zu einer quadratischen Figur gestaltet wird, oder wenn Wasser aus einem Hohlzylinder in einen ausgehöhlten quadratischen Balken umgegossen wird, denn von der Wasserhöhe her wird sich zeigen, wie der Kreis, der die Grundfläche des Zylinders ist, sich zum Quadrat verhält, das die Grundfläche des Balkens bzw. des ausgehöhlten Prismas ist; und wenn dasselbe Wasser im Prisma um das Doppelte oder Dreifache höher aufsteigt als im Zylinder, wird das Quadrat die Hälfte oder ein Drittel des Kreises sein, und deshalb wird ein anderes Quadrat, das von diesem das Doppelte oder Dreifache sei, wie es durch die Geometrie ohne jede Mühe gefunden wird, gleich dem Kreis sein.

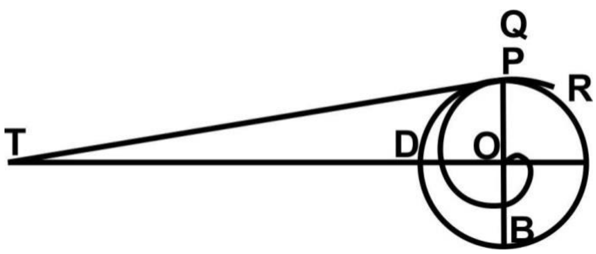



Jedoch muss man wissen, dass etwas Derartiges von den Geometern nicht gesucht wird, sondern es wird von jenen nach einem Weg geforscht, auf dem - ohne irgendeinen materiellen Kreis, sei es durch seine Umformung oder Legung an eine Ebene - durch einen bestimmten Kunstgriff und zwar eine Regel oder ein Instrument, das zu führen in der Macht stehe, wie es diejenigen sind, womit ein Kreis oder eine Ellipse oder eine andere Linie beschrieben wird, eine dem Kreisumfang gleiche Gerade oder sogar die Seite eines dem Kreis gleichen Quadrats gefunden und bestimmt werden kann.

Deshalb wird keine Quadratur des Kreises mit Hilfe eines in gerader Richtung ausgestreckten Fadens oder gar mit Hilfe eines auf einer Ebene vorwärts gerollten Rades oder eines Maßstabes gesucht, der an die Teile eines materiellen Kreisumfangs durch aufeinander folgende Berührung angelegt wird.

Daher ist auch die Quadratur des Kreises durch Berührung einer Spirale, die von Archimedes dargestellt wurde, nicht jene, die gesucht wird; als eine derartige hat Archimedes sie auch nicht angepriesen. Ohne Zweifel ist die Spirale eine krumme Linie, die von einem Schreibstift beschrieben wird, der entlang eines um ein Zentrum gehenden Strahls vom Zentrum aus in Richtung eines Umkreises marschiert und der mit seiner Spitze eine darunter liegende unbewegliche Ebene berührt und auf ihr die Spur seiner Bewegung zurücklässt, die aus einer geraden und kreisförmigen zusammengesetzt ist; nur möge man sich vorstellen, dass die Bewegung des Strahls um ein Zentrum und die des Schreibstifts auf dem Strahl gleichförmig oder proportional sind. Eine derartige Linie steht aber nicht zur Verfügung, denn es kann (ohne einen materiellen Kreis) bis jetzt von uns nicht erreicht werden, dass mit immer gleicher oder proportionaler Geschwindigkeit ein Strahl um ein Zentrum und ein Schreibstift auf dem Strahl bewegt werden.

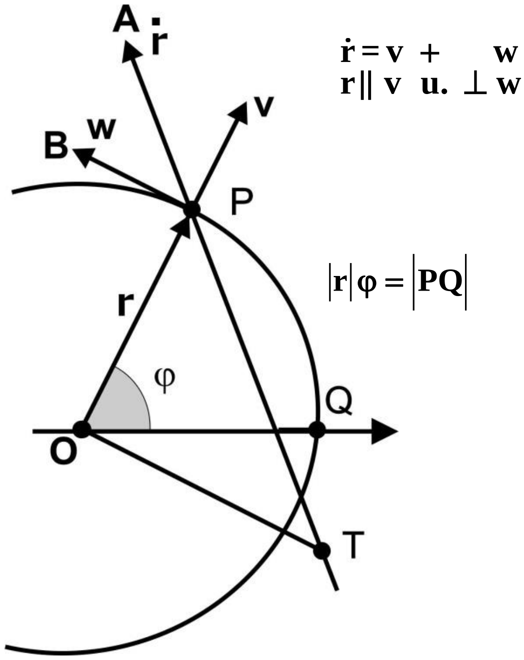
Wenn sie bereits aufgezeichnet worden wäre, müsste danach an dieser materiell aus einer Ebene heraus-geschnittenen Spirale durch eine Regel eine gewisse Tangente angelegt werden, mit deren Hilfe man eine einem Kreis gleiche Gerade bestimmen würde.

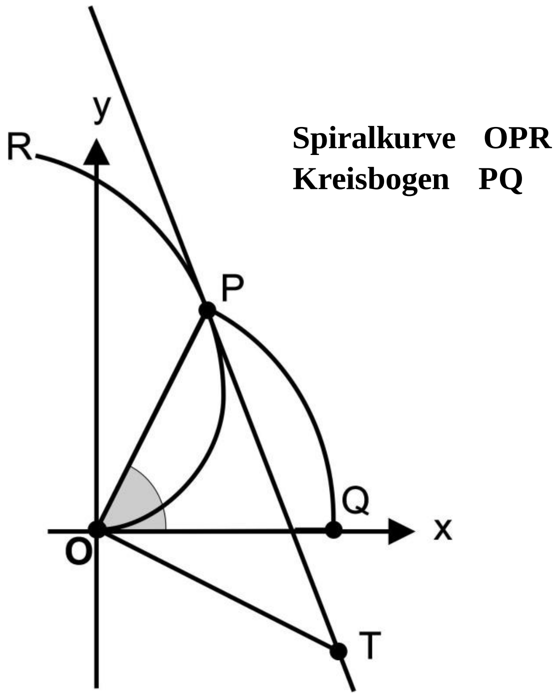



Archimedes: *Über Spiralen*, *Prop. XVIII*

**Archimedische Spirale**:

$\mathbf{r = a\varphi\,,\ \ \varphi \geq 0}$



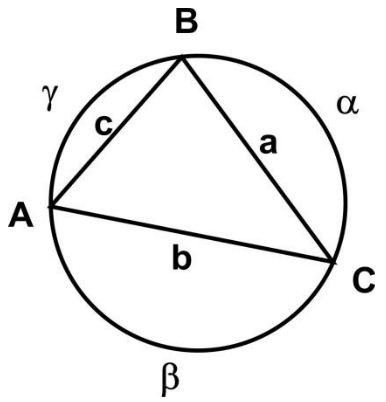

**Tangenteneigenschaft**

$\angle\mathbf{POT = 90°} \ \Rightarrow\ |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{OT}|$

---

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a\varphi\cos\varphi \\ a\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = a\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + a\varphi\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \qquad \Delta ABP \sim \Delta POT \Rightarrow \frac{|\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|OT|}{|OP|} = \frac{a\varphi\dot{\varphi}}{a\dot{\varphi}} = \varphi$$

Eng verbunden mit diesem Problem von der Kreisquadratur ist ferner das Problem der allgemeinen Winkelteilung bzw. die geometrische Trigonometrie, mit deren Hilfe nämlich Winkel so gut wie gerade Linien behandelt werden können, so dass ein Winkel gefunden werden kann, der zu einem anderen gegebenen ein gegebenes Verhältnis einer Zahl zu einer Zahl oder auch einer Geraden zu einer Geraden hat; so dass ebenso aus gegebenen Seiten eines Dreiecks die Quantität eines Winkels bzw. eines ihn aufspannenden Bogens als Verhältnis zu seinem ganzen Umkreis gefunden werden kann; und dass umgekehrt mit einem Winkel und zwei Seiten oder mit zwei Winkeln und einer gegebenen Seite die übrigen beim Dreieck geometrisch gefunden werden.

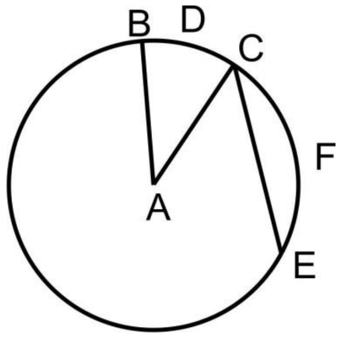



$$\frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}, & \textbf{Zahlen} \\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}, & \textbf{Geraden} \end{cases}$$

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \leftrightarrow \mathbf{W} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{W}$$

$$\mathbf{S} \Leftarrow \begin{cases} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S} \ \textbf{und} \ \varphi \in \mathbf{W} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{S} \ \textbf{und} \ \varphi, \psi \in \mathbf{W} \end{cases}$$

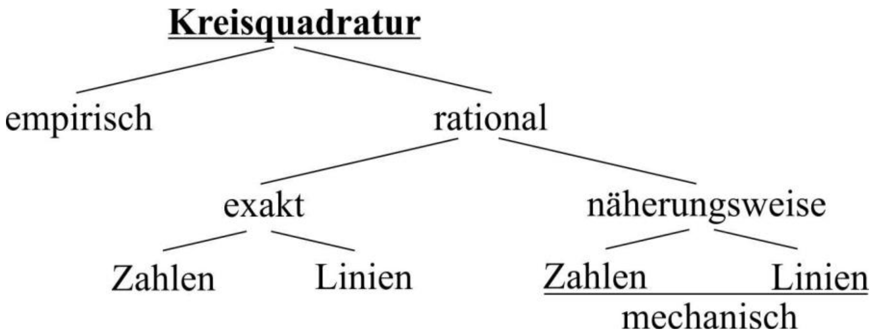



Dies alles könnte aber ohne Tafeln geleistet werden, wenn die volle Quadratur des Kreises gegeben wäre, ich betone *die volle*, d.h. die des Kreises und aller seiner Teile, nämlich der Segmente, wie CEFC und der Sektoren wie ABDC, denn so könnte auch eine einem beliebigen Teil eines Kreisumfangs bzw. einem Bogen, wie BDC, gleiche Gerade gefunden werden, wie Archimedes zeigte[1], und daher könnten Bögen (und welche jenen als Winkel entsprechen) gleich wie gerade Linien behandelt werden, was weitaus nützlicher wäre, als bloß die Quadratur des Kreises allein. Auf diese Art könnten wir nämlich ohne irgendwelche Sinustafeln alle trigonometrischen Probleme bewältigen; wie groß aber der Nutzen der Trigonometrie bei jeder mathematischen Sache ist, weiß jeder sehr wohl.

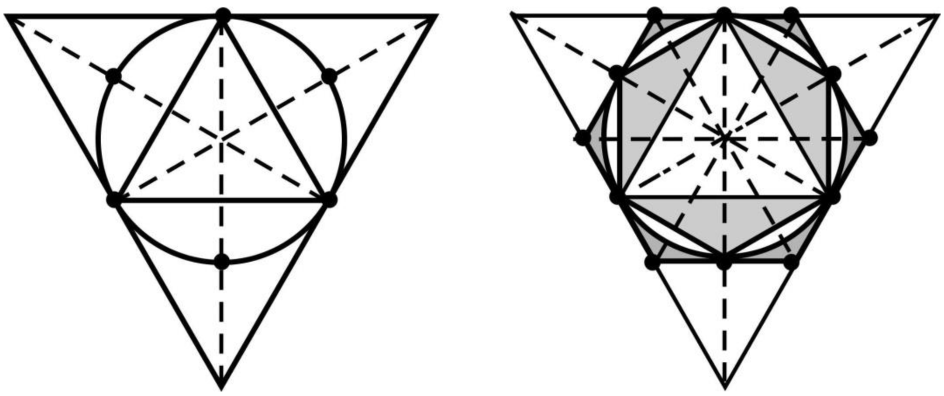
Ferner ist eine volle ebenso wie eine weniger volle Kreisquadratur entweder empirisch oder rational: Empirisch ist die, die durch einen ausgestreckten Faden und andere Umformungen und Versuche geschähe, und diese haben wir bereits zurückgewiesen; rational ist die, die durch einen gewissen Kunstgriff gefunden wird und nach einer Regel vorgeht, die aus der Natur der Sache entstanden ist. Die rationale ist aber entweder exakt oder näherungsweise, und jede von beiden geschieht entweder durch eine Rechnung oder durch das Ziehen von Linien: durch eine entweder endliche oder unendliche Rechnung, und entweder durch rationale oder durch irrationale Zahlen.

---

[1] ARCHIMEDES: *Über Spiralen, Prop. XX*; *Über Kugel und Zylinder (1. Buch), Prop. VI*




Jede näherungsweise Quadratur wird *mechanisch* genannt, sei es, sie geschehe durch das Ziehen von Linien, wie die höchst geistreichen von Willebrord Snell[1] und vor allem von Christiaan Huygens und einige andere, sei es, sie geschehe durch Rechnung, wie es Archimedes, Metius, Ludolph van Ceulen, der Schotte James Gregory und andere getan haben.



Auch hat Archimedes ja gesehen, dass man sich mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Polygonen der Größe eines Kreises beliebig nähern kann. Wenn nämlich zwei ähnliche Polygone, die zu zeichnen Euklid[2] lehrt, z.B. ein Dreieck, Sechseck oder andere dem Kreis ein- und umbeschrieben werden, wird man, nachdem die Winkel, die sie einschließen, zweigeteilt sind (denn die Zweiteilung des Winkels kann nach den Elementen[3] geschehen), zwei andere ein- und umbeschreiben können, die die doppelte Anzahl von Seiten oder Winkeln haben, und das bis ins Unendliche fortsetzen können, wobei der Kreis immer zwischen das letzte ein- und umbeschriebene fällt. Wenn man nämlich beim Dreieck beginnt, wird ein ein- sowie auch umbeschriebenes Sechseck, Zwölfeck, 24-, 48-, 96-Eck folgen. Und auf diese Art kann man so lange voranschreiten, wie man will, und da man ja immer den Flächeninhalt eines beliebigen durch diese Zweiteilungen geometrisch gefundenen Polygons in hinreichend genauen Zahlen erhalten kann, wird man deshalb immer zwei Flächeninhalte haben, zwischen die der Kreis fallen wird, die sich immer näher kommen werden; und **so kann es geschehen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger gegebener ist**, d. h., wenn jemand von mir eine **Zahl** verlangt, die das Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser so nahe ausdrücken möge, dass sie sich von der **wahren[4]** bis auf einen hunderttausendsten oder

---

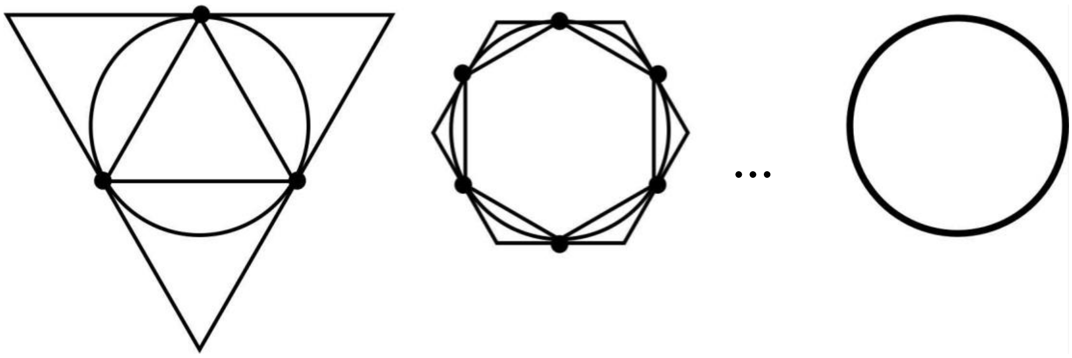
[1] W. SNELL, *Cyclometricus*, 1621, insbesondere prop. XI u. XXXI f., S. 16-19 u. 46-58; Chr. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. X-XII u. XX, S. 15-21 u. 40-44 (HO XII S. 139-149 u. 173-181); J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. I-XXII, S. 11-36 11; ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*; die von A. METIUS z. B. in *Geometria practica*, 1625, S. 178 f., u. *Manuale arithmeticae et geometriae practicae*, 1633, S. 102 f., überlieferte Näherung stammt von seinem Vater A. Anthonisz; LUDOLPH van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596; J. Gregory, *a. a. O.*, prop. XXIX, S. 43 f.; J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178-193 (WO I S. 467-476).

[2] EUKLID, *Elemente VI*

[3] a.a.O., I,9

[4] wahre Zahl? Vgl. Fußnote 1, S. 8

anderen Teil der Einheit nicht unterscheidet, so kann ich das durch fortgesetzte Zweiteilungen erreichen.

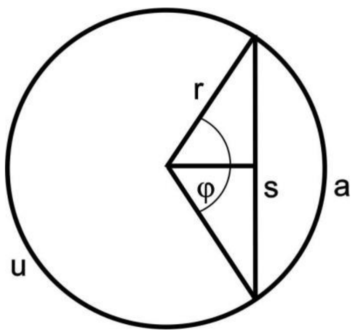


$$P_3 < K < Q_3 \qquad P_6 < K < Q_6 \qquad \cdots \qquad P_{96} < K < Q_{96}$$

$$Q_3 - P_3 \quad > \quad Q_6 - P_6 \quad > \quad \cdots \quad > \quad Q_{96} - P_{96}$$

Diese Methode begann Archimedes, Metius führte sie weiter, aber von allen am weitesten brachte sie Ludolph van Ceulen durch eine unglaubliche Arbeit voran, der, wenn er die in unserer Zeit entstandenen Abkürzungen gekannt hätte, allerdings um einen großen Teil der Arbeit erleichtert worden wäre.[1] Von den gefundenen Proportionen reicht aber zur Anwendung bei den kleinsten die Archimedische aus, dass nämlich der Kreisumfang zum Durchmesser wie 22 zu 7 sei, bei den mittleren die Metiussche, dass er wie 355 zu 113 sei, bei großen ist es ausreichend, den Teil der Ludolphinischen zu verwenden, dass er wie ......... zu ........... sei.

Ist aber das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis gefunden, kann leicht jeder andere beliebige Bogen mit Hilfe einer Sinustafel gemessen werden. Wenn nämlich jemand aus den Tafeln den Sinus einer halben Minute herausgeschrieben und verdoppelt hat, wird er die Sehne einer Minute haben bzw. des Bogens eben, der der 21.600-ste Teil des Kreisumfangs ist; wenn eine mittelmäßige Genauigkeit verlangt wird, kann diese Sehne gleich ihrem Bogen gesetzt werden, und deshalb mag es für die zu findende Länge eines Bogens von beispielsweise sieben Grad, da er ja 420 Minuten enthält, ausreichen, die aus den Tafeln gefundene Länge der Sehne einer Minute mit 420 zu multiplizieren. Wenn jemand noch genauer vorgehen will, kann er den Sinus einer Sekunde auf dieselbe Art benutzen.




**Radius r , Umfang u**

**Winkel φ , Sehne s , Bogen a**

$$\frac{2r}{u} = \frac{1}{\pi} \quad , \quad s = r \bullet 2 \bullet \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Und eben diese Quadratur des Kreises und seiner Teile wird, auch wenn sie rational ist, trotzdem mechanisch genannt. **Exakt** ist aber diejenige, welche die gesuchte Größe eines Kreises oder Bogens exakt darstellt, und sie ist entweder *linien-* oder *zahlenmäßig*, nämlich durch das Ziehen von Linien oder den Ausdruck eines **Wertes**. Ein **Wert** kann entweder durch eine Quantität oder durch eine Folge von Quantitäten exakt ausgedrückt werden, deren Natur und Bildungsgesetz erkannt wird: durch eine Quantität, wenn man z.B. irgendeine Zahl, sei es eine rationale oder irrationale oder aber auch eine in einer gewissen Gleichung eingeschlossene algebraische, angäbe, durch die der Wert eines Kreisbogens ausgedrückt würde; durch eine Folge, wenn man zeigt, dass eine gewisse Folge, deren bis ins Unendliche

[1] In wieweit stimmt das?

gültige Bildungsgesetz gegeben wird, als ganze zugleich genommen den **Wert des Bogens oder des Kreises** exakt ausdrückt.
Der erste Ausdruck wird von mir *analytisch* genannt, der zweite aber, wenn die Folge in rationalen Zahlen fortschreitet, scheint zu Recht mit dem Titel *arithmetische Quadratur* eingeschätzt werden zu können.

Wenn ich z. B. sage:

> **Wenn das Quadrat des Durchmessers 1 ist, ist der Kreis gleich der gesamten Folge von abwechselnd positiven und negativen ungeraden Brüchen unter der Einheit, nämlich $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. bis ins Unendliche**,

wie in dieser kleinen Schrift bewiesen werden wird; daher kann nicht geleugnet werden, dass ein gewisser exakter Wert des Kreises und irgendein gänzlich wahrer Ausdruck seiner Größe gefunden worden ist. Denn von diesen Zahlen ist **die Reihe selbst als ganze** jedenfalls kein Nichts, denn sie kann vergrößert und verkleinert werden, viele Theoreme können über sie nachgewiesen werden. Und wie, um Himmels willen, ist es möglich, dass sie nichts ist, wenn sie den **Wert des Kreises**[1] ausdrückt, außer wir meinen, dass dieser auch nichts ist. Wenn sie nun also irgendetwas ist, haben wir jedenfalls irgendeinen **Wert des Kreises als einen exakten** entdeckt.
Und wenn jemand irgendwann eine Folge von Ziffern fände, durch welche der einmal erkannte Ausdruck des Ludolph ohne eine neue Berechnung bis ins Unendliche fortgesetzt werden könnte (dass eine derartige Folge jedenfalls durch eine gewisse bestimmte Regel feststeht, ist notwendig), was das Schönste wäre, so hätte dieser die arithmetische Quadratur des Kreises in ganzen Zahlen, wie wir sie in Brüchen gegeben haben.

$$\pi \approx 3\,\frac{14.159.265.358.979.323.846.264.338.327.951}{100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000}$$ Ludolph van Ceulen (1540-1610)[2]

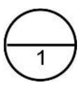
$$\pi = 3\,\frac{14.159.265.358.979.323.846.264.338.327.951...}{100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000}$$ **???** nach einer Regel (Formel)

Aber ich meine, dass diese Regel auch die schwierigste sein wird und sehr zusammengesetzt, und dass sie ein weniger schönes Theorem aufzeigen wird als unsere, bei der eine gewisse wunderbare Einfachheit der Natur hervorleuchtet, dass eben jene Zahlen, die die Differenzen aller Quadrate der Reihe nach sind, das Verhältnis des Kreises zum Quadrat des Durchmessers ausdrücken, so dass wohl kaum ein analytischer Ausdruck des Kreises, der mit einer einzigen Quantität zu bilden ist, wenn man ihn irgendwann finden wird, schöner erscheinen wird.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1^2-0^2} - \frac{1}{2^2-1^2} + \frac{1}{3^2-2^2} - \frac{1}{4^2-3^2} + \frac{1}{5^2-4^2} - \frac{1}{6^2-5^2} \quad \text{etc.}$$

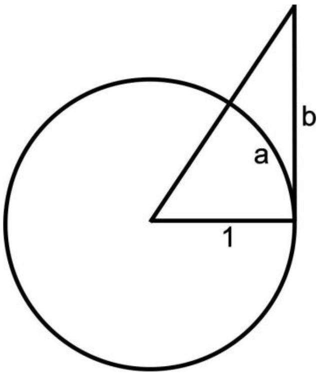
Abgesehen davon, dass durch dieselbe Regel nicht nur der Kreis, sondern auch ein beliebiger Teil von ihm, und nicht nur der Umkreis, sondern auch ein beliebiger Bogen gefunden werde, **was unmöglich durch einen gleich bleibenden analytischen Ausdruck** geschieht.

---

1  = $\pi/4$ ist also ein Wert und keine Zahl. Selbst $\sqrt{2}$ ist noch 1682 für Leibniz keine "Zahl", sondern geometrische Quantität (Größe). Siehe dazu D. D. SPALT, *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit* , S. 125 f., Verlag Karl Alber, 2015.

2 a. a. O., S. 126, "Das Symbol "$\pi$" war damals für die Ludoph'sche Zahl noch nicht üblich. Es wurde erstmals im Jahr 1706 von William JONES (1675-1749) in seinem Buch *Synopsis palmariorum mathesos* verwendet."

**Unsere allgemeine Regel und daher die *volle arithmetische Quadratur* läuft darauf hinaus, dass, wenn die Tangente, die nicht größer als der Radius sei, als b gesetzt ist, der Radius als Einheit, der Bogen selbst, der natürlich nicht größer als der Viertelkreis ist, $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. ist.**




**b: Tangente**

$$\textbf{Bogen:}\ a=\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}\ \text{etc.}$$

Daraus ergeben sich trigonometrische Probleme, die ohne Tafeln zu bewältigen sind. Davon später.

Es bleiben noch zwei exakte Quadraturen übrig; die eine, die linienmäßige bzw. geometrische, die andere, die analytische. Allerdings ist nicht jedes Analytische etwas Geometrisches; es können nämlich gewisse Größen[1] ausgedrückt werden, die mit Hilfe der bekannten Kunstgriffe nicht durch gezogenen Linien dargestellt werden können; andererseits können mit Instrumenten Linien aufgezeichnet werden, deren Ausdruck noch nicht zur Verfügung steht. Ich werde nämlich zeigen, dass es manchmal geometrische Linien gibt, die nicht weniger leicht als die cartesischen durch Bewegungen von Schienen, die auf eine gewisse bestimmte Weise vorrücken, beschrieben werden und ebenso geometrisch wie Parabeln und Hyperbeln sind, und die für einige bestimmte zu lösende Probleme einzig notwendig sind, die trotzdem nicht durch Rechnung auf gewisse Gleichungen und bestimmte Dimensionen[2] zurückgeführt werden können.

**<u>Vollkommen wird aber jene Quadratur sein, die zugleich analytisch und linienmäßig ist, bzw. die durch gleich(wertig)e, auf Gleichungen von bestimmten Dimensionen zurückführbare Linien konstruiert wird.</u>**

Dass diese unmöglich ist, hat der äußerst scharfsinnige Gregory[3] in dem Buch *Über die wahre Quadratur des Kreises* behauptet, aber einen Beweis hat er damals jedenfalls, wenn ich mich nicht täusche, nicht zustande gebracht. Ich sehe noch nicht, was daran hindert, dass der Kreisumfang selbst oder irgendein festgelegter Teil von ihm gemessen wird, und dass das Verhältnis eines gewissen Bogens zu seinem Sinus durch eine Gleichung eines bestimmten Grades ausgedrückt wird. Aber *die Beziehung des Bogens zum Sinus im allgemeinen durch eine Gleichung eines bestimmten Grades zu erklären, ist unmöglich*, wie ich in dieser kleinen Schrift beweisen werde, weshalb ich auch als Korollar dies herleiten werde:

[1] Größe = magnitudo – quantitas = Qualität

[2] Dimension = dimensio = Grad

[3] J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667, prop. 11,* S. 25-28.

,, **Als volle analytische, durch eine Gleichung**
,, **ausgedrückte Quadratur, deren Dimensionen der**
,, **Terme rationale Zahlen seien, kann eine vollkom-**
,, **menere nicht gefunden werden, als wir sie**
,, **gegeben haben, wenn wir sagten, dass der Bogen,**
,, **der nicht größer als der Viertelkreis ist,**
,, $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ **etc ist, wobei seine Tangente**
,, **b und der Radius 1 gesetzt ist.**

Was für eine auch immer man nämlich geben wird, sie wird jedenfalls ins Unendliche fortschreiten, denn sonst, wie es gezeigt wurde, wird sie entweder keine volle sein bzw. einen beliebigen Bogen nicht darstellen, oder sie wird zu einer bestimmten Dimension beim höchsten Term gehören, was wir aber als etwas Widersinniges bewiesen haben. Wenn sie nun schon ins Unendliche fortschreiten wird, gibt es jedenfalls keine vollkommenere als die, die wir gegeben haben. Denn ihre Unvollkommenheit besteht darin, dass man bis ins Unendliche voranschreiten muss.
**Dass es eine bequemere und einfachere als unsere gibt, ist vielleicht möglich, aber daran stoßen wir uns wenig, vor allem, weil es nicht einmal wahrscheinlich ist, dass bei unverletzter Allgemeinheit ein einfacherer und naturgemäßerer Ausdruck, und einer, der den Geist mehr anregt, gefunden werden kann**.

Aber die Beziehung des Bogens zum Sinus im Allgemeinen durch eine Gleichung eines bestimmten Grades zu erklären, ist unmöglich.[1]

Das wird folgendermaßen leicht bewiesen. Sei jene gefundene Gleichung von einem beliebigen bestimmten Grad, z.B. kubisch, biquadratisch, surdesolide bzw. fünften Grades, sechsten Grades und so weiter, so nämlich, dass von der gefundenen Gleichung irgendeine Dimension die größte ist, die als Exponenten eine endliche Zahl hat. Unter dieser Voraussetzung wird man eine krumme Linie desselben Grades in der Weise zeichnen können, dass, während die Abszisse die Sinusse ausdrückt, die Ordinate die Bögen ausdrückt oder umgekehrt. Also wird man mit Hilfe dieser Linie einen Bogen oder einen Winkel in einem gegebenen Verhältnis teilen bzw. vom Bogen, der zu einem gegebenen ein gegebenes Verhältnis hat, den Sinus finden können; also wird das Problem der allgemeinen Winkelteilung das eines bestimmten Grades sein, nämlich ein solides oder sursolides oder das eines anderen höheren Grades, den ja die Natur oder die Gleichung dieser besagten Linie anzeigen wird. Aber das ist abwegig; es steht nämlich fest, dass es so viele verschiedene Grade bei dem Problem gibt wie Anzahlen (wenigstens ungerade) bei den Teilungen. Denn die Zweiteilung eines Winkels ist ein ebenes Problem, die Dreiteilung ein solides bzw. ein Kegelschnittproblem, die Fünfteilung ist ein *problema surdesolidum*, und so weiter bis ins Unendliche; das Problem wird ein höheres, je nachdem die Anzahl der gleichen Teile, in die ein Winkel geteilt werden soll, größer ist, was bei den Analytikern unzweifelhaft ist und allgemein leicht bewiesen werden könnte, wenn der Platz es zuließe[2]. Unmöglich ist also, dass die Beziehung des Bogens zum Sinus im Allgemeinen durch eine bestimmte Gleichung eines festgelegten Grades ausgedrückt wird. Das war zu beweisen.

[1] Siehe auch QA 2016, Satz 51, Seite 274 ff. Eine sehr ausführliche Untersuchung zum Unmöglichkeitsbeweis bietet: Davide CRIPPA (https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01098493) .
[2] Der Beweis wurde erst im 19. Jhd. geführt.