PRAEFATIO OPUSCULI DE QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA

[April-Juni 1676]

Quelle: G. W. Leibniz.
Sämtliche Schriften und Briefe, Siebente Reihe:
Mathematische Schriften, Bd. 6 1673-1676.
Arithmetische Kreisquadratur (AVII 6, N. 19). Akademie-Verlag 2012.

G. W. Leibniz (1646–1716)

VORWORT ZUR KLEINEN SCHRIFT ÜBER DIE ARITHMETISCHE QUADRATUR DES KREISES

Übers. Otto Hamborg 2007 / 2017

PRAEFATIO OPUSCULI DE QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA.

Quoniam Problema de Quadratura Circuli in omnium ore versatur et ardentibus quaerentium studiis etiam apud homines Geometriae prorsus expertes celebre redditum est, operae pretium erit naturam quaestionis paucis exponere, ut appareat quid ab omni aevo quaesitum sit, quid ante nos praestitum, quid a nobis adjectum quidque agendum supersit posteritati.

Cum Pythagoras ejusque discipuli Geometriae rectilinea Elementa absolvissent, quae postea ab Euclide in unum corpus redacta sunt, jamque id effectum esset, ut cuilibet figurae rectilineae planae datae exhiberi posset quadratum aequale, quod scilicet omnium figurarum rectilinearum simplicissimum et quodammodo caeterorum mensura est; cogitari coepit an non posset circulo exhiberi aequalis figura rectilinea, adeoque et aequale quadratum. Et hoc est illud, quod Circuli quadratura vulgo vocatur; nam si Triangulum quoddam aut aliud Polygonum quodcunque Circulo aequale describi posset, utique et quadratum ei aequale esset in potestate. Et quoniam Archimedes ostendit, Triangulum rectangulum, cujus altitudo sit radius, basis autem sit circumferentia in rectam extensa, fore circuli spatium, ideo si quis inveniet rectam quandam circumferentiae circuli aequalem, daret nobis quadraturam.

Hic nonnullis, qui explicationem audiunt, mirari subit, cur rem, ut ipsis videtur, facillimam tamdiu quaesierint Geometrae; quid enim facilius quam rectam circumferentiae aequalem invenire, circulo materiali filum circumligando idque postea in rectum extendendo ac mensurando. Eodem jure dicere possent, facile quadrari circulum, si cerea massa primum circularis, postea ad quadratam figuram redigatur, aut si aqua ex cylindro cavo in trabem quadratam excavatam transfundatur, nam ex aquae altitudine apparebit, quomodo circulus, qui est basis cylindri, sit ad quadratum, quod est basis trabis sive prismatis excavati, et si eadem aqua duplo vel triplo altius assurgat in prismate quam in cylindro, erit

VORWORT ZUR KLEINEN SCHRIFT ÜBER DIE ARITHMETISCHE QUADRATUR DES KREISES

Da nun das Problem von der Quadratur des Kreises in aller Munde ist und durch die leidenschaftlichen Bemühungen der Forscher sogar bei den Menschen berühmt gemacht wurde, die an der Geometrie ganz und gar unbeteiligt sind, wird es der Mühe wert sein, die Natur des Untersuchungsgegenstandes mit wenigen Worten darzustellen, damit sich zeigt, was von jeder Generation gesucht, was vor uns geleistet, was von uns hinzugefügt wurde und was der Nachwelt zu tun übrig bleibt.

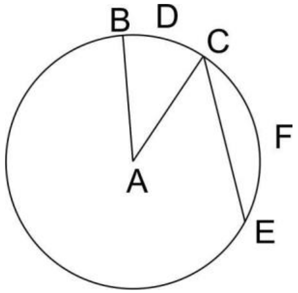
Als Pythagoras und seine Schüler die geradlinigen Elemente der Geometrie vollendet hatten, die später von Euklid zu einem einzigen Ganzen gestaltet wurden, und nunmehr das erreicht worden war, dass man zu einer beliebigen gegebenen ebenen geradlinigen Figur ein ihr gleiches Quadrat darstellen konnte, das natürlich von allen geradlinigen Figuren am einfachsten und gewissermaßen das Maß der übrigen ist, begann man darüber nachzudenken, ob nicht zu einem Kreis eine ihm gleiche geradlinige Figur und deshalb auch ein ihm gleiches Quadrat dargestellt werden könnte. Und das ist jenes, was gewöhnlich die Quadratur des Kreises genannt wird; wenn nämlich ein gewisses Dreieck oder irgendein beliebiges Polygon beschrieben werden könnte, das gleich dem Kreis ist, bestünde jedenfalls auch die Möglichkeit zu einem ihm gleichen Quadrat. Und da ja Archimedes gezeigt hat, dass das rechtwinklige Dreieck, dessen Höhe der Radius, dessen Grundlinie aber der in eine Gerade ausgestreckte Kreisumfang ist, die Kreisfläche sein wird, würde uns deshalb jemand eine Quadratur liefern, wenn er eine gewisse, dem Umfang des Kreises gleiche Gerade fände.

Hier kommt einigen, die die Erklärung hören, in den Sinn, sich zu wundern, warum die Geometer so lange eine, wie ihnen eben scheint, sehr leichte Sache gesucht haben; denn was ist leichter, als eine dem Kreisumfang gleiche Gerade dadurch zu finden, dass man um einen materiellen Kreis einen Faden legt und diesen danach in gerader Richtung ausstreckt und misst. Mit demselben Recht könnten sie sagen, dass der Kreis leicht quadriert wird, wenn eine zuerst kreisförmige Wachsmasse danach zu einer quadratischen Figur gestaltet wird, oder wenn Wasser aus einem Hohlzylinder in einen ausgehöhlten quadratischen Balken umgegossen wird, denn von der Wasserhöhe her wird sich zeigen, wie der Kreis, der die Grundfläche des Zylinders ist, sich zum Quadrat verhält, das die Grundfläche des Balkens bzw. des ausgehöhlten Prismas ist; und wenn dasselbe Wasser im Prisma um das Doppelte oder Dreifache höher aufsteigt als im Zylinder, wird das Quadrat die quadratum circuli dimidium vel triens, adeoque aliud quadratum, quod hujus duplum triplumve sit, quale per Geometriam nullo negotio invenitur, erit circulo aequale. Verum sciendum est, tale quiddam a Geometris non quaeri, sed viam ab illis investigari, per quam sine ullo circulo materiali ejusve transformatione aut ad planum applicatione, certa arte ac regula instrumentove quod dirigere sit in potestate, qualia sunt, quibus Circulus aut Ellipsis aliave linea describitur, inveniri ac designari possit recta circumferentiae aequalis, vel etiam latus quadrati circulo aequalis. Itaque per filum in rectum extensum, aut etiam per rotam in plano provolutam aut regulam circumferentiae materialis partibus successivo contactu applicatam non quaeritur quadratura circuli. Hinc etiam quadratura circuli per contactum Helicis ab Archimede exhibita non est illa quae quaeritur, neque pro tali eam venditavit Archimedes. Nimirum Helix est curva linea, quae describitur a stylo, qui per radium circa centrum euntem a centro versus circumferentiam incedit et planum subjectum immobile apice suo attingit inque eo vestigium motus sui, ex recto circularique compositi, relinquit; modo intelligatur motum radii circa centrum et styli in radio esse uniformes aut proportionales. Talis autem linea non est in potestate, neque enim (sine circulo materiali) effici hactenus a nobis potest, ut aequali aut proportionali velocitate moveantur semper radius circa centrum et stylus in radio. Deinde si descripta jam esset, deberet huic helici materialiter ex plano excisae regula quaedam tangens applicari, cujus ope recta circulo aequalis determinaretur.

Porro Problemati de Quadratura Circuli connexum est problema de sectione Angulorum universali, sive Trigonometria Geometrica, cujus ope scilicet Anguli tractari possint instar linearum rectarum, ut possit inveniri angulus, qui ad alium datum habeat rationem datam numeri ad numerum, vel etiam rectae ad rectam, item ut ex datis lateribus Trianguli inveniri possit quantitas anguli seu arcus eum

Hälfte oder ein Drittel des Kreises sein, und deshalb wird ein anderes Quadrat, das von diesem das Doppelte oder Dreifache sei, wie es durch die Geometrie ohne jede Mühe gefunden wird, gleich dem Kreis sein. Jedoch muss man wissen, dass etwas Derartiges von den Geometern nicht gesucht wird, sondern es wird von jenen nach einem Weg geforscht, auf dem - ohne irgendeinen materiellen Kreis, sei es durch seine Umformung oder Legung an eine Ebene - durch einen bestimmten Kunstgriff und zwar eine Regel oder ein Instrument, das zu führen in der Macht stehe, wie es diejenigen sind, womit ein Kreis oder eine Ellipse oder eine andere Linie beschrieben wird, eine dem Kreisumfang gleiche Gerade oder sogar die Seite eines dem Kreis gleichen Quadrats gefunden und bestimmt werden kann. Deshalb wird keine Quadratur des Kreises mit Hilfe eines in gerader Richtung ausgestreckten Fadens oder gar mit Hilfe eines auf einer Ebene vorwärts gerollten Rades oder eines Maßstabes gesucht, der an die Teile eines materiellen Kreisumfangs durch aufeinander folgende Berührung angelegt wird. Daher ist auch die Quadratur des Kreises durch Berührung einer Spirale, die von Archimedes dargestellt wurde, nicht jene, die gesucht wird; als eine derartige hat Archimedes sie auch nicht angepriesen. Ohne Zweifel ist die Spirale eine krumme Linie, die von einem Schreibstift beschrieben wird, der entlang eines um ein Zentrum gehenden Strahls vom Zentrum aus in Richtung eines Umkreises marschiert und der mit seiner Spitze eine darunter liegende unbewegliche Ebene berührt und auf ihr die Spur seiner Bewegung zurücklässt, die aus einer geraden und kreisförmigen zusammengesetzt ist; nur möge man sich vorstellen, dass die Bewegung des Strahls um ein Zentrum und die des Schreibstifts auf dem Strahl gleichförmig oder proportional sind. Eine derartige Linie steht aber nicht zur Verfügung, denn es kann (ohne einen materiellen Kreis) bis jetzt von uns nicht erreicht werden, dass mit immer gleicher oder proportionaler Geschwindigkeit ein Strahl um ein Zentrum und ein Schreibstift auf dem Strahl bewegt werden. Wenn sie bereits aufgezeichnet worden wäre, müsste danach an dieser materiell aus einer Ebene herausgeschnittenen Spirale durch eine Regel eine gewisse Tangente angelegt werden, mit deren Hilfe man eine einem Kreis gleiche Gerade bestimmen würde.

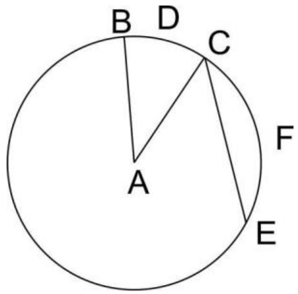
Eng verbunden mit diesem Problem von der Kreisquadratur ist ferner das Problem der allgemeinen Winkelteilung bzw. die geometrische Trigonometrie, mit deren Hilfe nämlich Winkel so gut wie gerade Linien behandelt werden können, so dass ein Winkel gefunden werden kann, der zu einem anderen gegebenen ein gegebenes Verhältnis einer Zahl zu einer Zahl oder auch einer Geraden zu einer Geraden hat; so dass ebenso aus gegebenen Seiten eines Dreiecks die Quantität eines subtendentis ratio ad circumferentiam suam totam, et ut vicissim uno angulo et duobus lateribus, vel duobus angulis et uno latere dato, caetera in Triangulo geometrice inveniantur.



Haec autem omnia praestari sine Tabulis possent, si plena Circuli daretur Quadratura, *plena*, inquam, id est circuli et omnium ejus partium, segmentorum scilicet, ut CEFC, atque sectorum ut ABDC, ita enim etiam cuilibet circumferentiae portioni sive arcui, ut BDC, aequalis inveniri posset recta, quemadmodum ostendit Archimedes, ac proinde arcus (et qui illis respondent anguli) instar linearum rectarum tractari possent, quod longe utilius foret, quam ipsamet circuli quadratura sola. Hoc enim modo sine ullis Sinuum Tabulis omnia problemata Trigonometrica efficere possemus; Trigonometriae autem quantus sit in omni re mathematica usus, nemo ignorat.

Porro plena pariter ac minus plena Circuli Quadratura vel empirica est vel rationalis: Empirica, quae filo extenso aliisque transformationibus ac tentamentis fieret, et hanc jam rejecimus; Rationalis, quae arte quadam invenitur et secundum regulam ex rei natura ortam procedit. Rationalis autem est vel exacta vel appropinquans, utraque vel per calculum vel per ductum Linearum: per calculum vel finitum vel infinitum, et vel per numeros rationales vel per irrationales. Omnis quadratura appropinquans appellatur *Mechanica*, sive fiat per ductum linearum, quales ingeniosissimae Willebrordi Snellii et imprimis Christiani Hugenii aliaeque nonnullae, sive fiat per calculum, quemadmodum

Winkels bzw. eines ihn aufspannenden Bogens als Verhältnis zu seinem ganzen Umkreis gefunden werden kann; und dass umgekehrt mit einem Winkel und zwei Seiten oder mit zwei Winkeln und einer gegebenen Seite die übrigen beim Dreieck geometrisch gefunden werden.



Dies alles könnte aber ohne Tafeln geleistet werden, wenn die volle Quadratur des Kreises gegeben wäre, ich betone *die volle*, d.h. die des Kreises und aller seiner Teile, nämlich der Segmente, wie CEFC und der Sektoren wie ABDC, denn so könnte auch eine einem beliebigen Teil eines Kreisumfangs bzw. einem Bogen, wie BDC, gleiche Gerade gefunden werden, wie Archimedes zeigte, und daher könnten Bögen (und welche jenen als Winkel entsprechen) gleich wie gerade Linien behandelt werden, was weitaus nützlicher wäre, als bloß die Quadratur des Kreises allein. Auf diese Art könnten wir nämlich ohne irgendwelche Sinustafeln alle trigonometrischen Probleme bewältigen; wie groß aber der Nutzen der Trigonometrie bei jeder mathematischen Sache ist, weiß jeder sehr wohl.

Ferner ist eine volle ebenso wie eine weniger volle Kreisquadratur entweder empirisch oder rational: Empirisch ist die, die durch einen ausgestreckten Faden und andere Umformungen und Versuche geschähe, und diese haben wir bereits zurückgewiesen; rational ist die, die durch einen gewissen Kunstgriff gefunden wird und nach einer Regel vorgeht, die aus der Natur der Sache entstanden ist. Die rationale ist aber entweder exakt oder näherungsweise, und jede von beiden geschieht entweder durch eine Rechnung oder durch das Ziehen von Linien: durch eine entweder endliche oder unendliche Rechnung, und entweder durch rationale oder durch irrationale Zahlen. Jede näherungsweise Quadratur wird *mechanisch* genannt, sei es, sie geschehe durch das Ziehen von Linien, wie die höchst geistreichen von Willebrord Snell und vor allem von Christiaan Huygens und einige andere, sei es, sie geschehe durch Rechnung, wie es Archimedes, Metius, Ludolph

Archimedes, Metius, Ludolphus a Colonia, Jac. Gregorius Scotus, aliique fecere.

Et Archimedes quidem vidit ope Polygonorum inscriptorum et circumscriptorum, quantumvis ad circuli magnitudinem accedi posse. Si enim Polygona duo similia, qualia delineare docet Euclides, ut Trigonum, Hexagonum, aliave circulo inscribantur [ac circumscribantur], poterunt angulis quos comprehendunt bisectis (bisectio enim anguli per Elementa fieri potest) alia duo duplum laterum vel angulorum numerum habentia inscribi ac circumscribi, idque in infinitum continuari, circulo semper inter ultimum inscriptum et circumscriptum cadente. Nempe si a trigono incipias, sequetur hexagonum, dodecagonum, 24^{gonum}, 48^{gonum}, 96^{gonum}, inscriptum pariter et circumscriptum. Et hoc modo procedi potest, quousque voles, et quoniam cujuslibet polygoni geometrice per has bisectiones inventi area semper haberi potest in numeris satis exactis, ideo semper duae habebuntur areae, intra quas circulus cadet, quae propius semper accedent, et ita fieri potest, ut error sit minor quovis dato, id est si quis a me postulet numerum, qui rationem circumferentiae ad diametrum tam prope exprimat, ut non differat a vero centesima millesima, aliave unitatis parte, id continuatis bisectionibus efficere possum. Hanc methodum Archimedes coepit, Metius longius, sed longissime omnium incredibili labore produxit Ludolphus a Colonia, qui si scivisset compendia hodie nata, utique magna laboris parte fuisset levatus. Ex proportionibus autem inventis ad usum in minimis sufficit Archimedea, quod scilicet circumferetia sit ad diametrum ut 22 ad 7, in mediis Metiana, quod sit ut 355 ad 113, in magnis satis est adhiberi partem Ludolphinae, quod sit ut ... ad ...

Inventa autem ratione diametri ad circumferentiam potest facile omnis alius arcus quilibet mensurari ope Tabulae Sinuum. Nam si quis ex tabulis excerpserit sinum dimidii minuti ac duplicaverit, habebit chordam minuti, seu ipsius arcus qui sit 21600^{ma} pars circumferentiae, quae chorda, cum mediocris exactitudo desideratur, potest arcui suo aequalis poni, adeoque ad arcus exempli causa septem graduum inveniendam longitudinem, quoniam is 420 minuta continet, suffecerit chordae unius minuti longitudinem ex Tabulis inventam per 420 multiplicari. Si quis exactius adhuc procedere velit, sinu minuti secundi eodem modo uti potest.

van Ceulen, der Schotte James Gregory und andere getan haben.

Auch hat Archimedes ja gesehen, dass man sich mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Polygonen der Größe eines Kreises beliebig nähern kann. Wenn nämlich zwei ähnliche Polygone, die zu zeichnen Euklid lehrt, z.B. ein Dreieck, Sechseck oder andere dem Kreis ein- und umbeschrieben werden, wird man, nachdem die Winkel, die sie einschließen, zweigeteilt sind (denn die Zweiteilung des Winkels kann nach den Elementen geschehen), zwei andere ein- und umbeschreiben können, die die doppelte Anzahl von Seiten oder Winkeln haben, und das bis ins Unendliche fortsetzen können, wobei der Kreis immer zwischen das letzte ein- und umbeschriebene fällt. Wenn man nämlich beim Dreieck beginnt, wird ein ein- sowie auch umbeschriebenes Sechseck, Zwölfeck, 24-, 48-, 96-Eck folgen. Und auf diese Art kann man so lange voranschreiten, wie man will, und da man ja immer den Flächeninhalt eines beliebigen durch diese Zweiteilungen geometrisch gefundenen Polygons in hinreichend genauen Zahlen erhalten kann, wird man deshalb immer zwei Flächeninhalte haben, zwischen die der Kreis fallen wird, die sich immer näher kommen werden; und so kann es geschehen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger gegebener ist, d.h., wenn jemand von mir eine Zahl verlangt, die das Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser so nahe ausdrücken möge, dass sie sich von der wahren bis auf einen hunderttausendsten oder anderen Teil der Einheit nicht unterscheidet, so kann ich das durch fortgesetzte Zweiteilungen erreichen. Diese Methode begann Archimedes, Metius führte sie weiter, aber von allen am weitesten brachte sie Ludolph van Ceulen durch eine unglaubliche Arbeit voran, der, wenn er die in unserer Zeit entstandenen Abkürzungen gekannt hätte, allerdings um einen großen Teil der Arbeit erleichtert worden wäre. Von den gefundenen Proportionen reicht aber zur Anwendung bei den kleinsten die Archimedische aus, dass nämlich der Kreisumfang zum Durchmesser wie 22 zu 7 sei, bei den mittleren die Metiussche, dass er wie 355 zu 113 sei, bei großen ist es ausreichend, den Teil der Ludolphinischen zu verwenden, dass er wie .... zu .... sei.

Ist aber das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis gefunden, kann leicht jeder andere beliebige Bogen mit Hilfe einer Sinustafel gemessen werden. Wenn nämlich jemand aus den Tafeln den Sinus einer halben Minute herausgeschrieben und verdoppelt hat, wird er die Sehne einer Minute haben bzw. des Bogens eben, der der 21.600-ste Teil des Kreisumfangs ist; wenn eine mittelmäßige Genauigkeit verlangt wird, kann diese Sehne gleich ihrem Bogen gesetzt werden, und deshalb mag es für die zu findende Länge eines Bogens von beispielsweise sieben Grad, da er ja 420 Minuten enthält, ausreichen, die aus den Tafeln gefundene Länge der Sehne einer Minute mit 420 zu multiplizieren. Wenn jemand noch genauer vorgehen will, kann er den Sinus einer Sekunde auf dieselbe Art benutzen.

Et haec quidem Circuli ejusque partium quadratura, etsi Rationalis sit, Mechanica tamen appellatur. Exacta autem est, quae quaesitam Circuli aut arcus magnitudinem exacte exhibet, eaque aut *Linearis* aut *Numerica* est, scilicet vel ductu linearum, vel expressione valoris. Valor exprimi potest exacte, vel per quantitatem, vel per progressionem quantitatum, cujus natura et continuandi modus cognoscitur: per quantitatem, ut si quis numerum aliquem sive rationalem, sive irrationalem, sive etiam Algebraicum, aequationi cuidam inclusum daret, quo valor arcus circuli exprimeretur; per progressionem, si quis ostendat progressionem quandam, cujus continuandae in infinitum regula datur, totam simul sumtam arcus vel circuli valorem exacte exprimere. Prior expressio a me vocatur *Analytica*, posterior vero, cum progressio procedit in numeris rationalibus, jure *Quadraturae Arithmeticae* titulo censeri posse videtur, ut cum dico: Si quadratum diametri sit 1,

circulum aequari toti progressioni fractionum sub unitate imparium alternis affirmatarum et negatarum, nempe $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. in infinitum, ut in hoc opusculo demonstrabitur, ubi negari non potest, exactum quendam circuli valorem expressionemque magnitudinis ejus aliquam omnino veram esse repertam. Ipsa enim series horum numerorum tota utique non est nihil, potest enim augeri ac minui, possunt multa de ea theoremata evinci. Et quomodo, obsecro, possibile est, eam esse nihil, si valorem circuli exprimit, nisi hunc quoque nihil esse putemus. Quodsi ergo est aliquid, utique aliquem circuli valorem exactum deprehendimus. Et si quis aliquando reperiret progressionem characterum, qua semel cognita Ludolphi expressio sine novo calculo continuari posset in infinitum (qualem progressionem utique regula quadam certa constare necesse est) quod foret pulcherrimum, is haberet quadraturam circuli Arithmeticam in integris, quemadmodum nos dedimus in fractis. Sed hanc regulam et difficillimam fore arbitror, et valde compositam, et minus pulchrum theorema exhibituram, ac nostra, in qua mira quaedam naturae simplicitas elucet, uti illi ipsi numeri, qui sunt differentiae omnium ordine quadratorum, circuli ad quadratum a diametro rationem exprimant, ut adeo vix ipsa analytica circuli expressio una quantitate facienda, si quando reperietur, pulchrior futura videatur.

Und eben diese Quadratur des Kreises und seiner Teile wird, auch wenn sie rational ist, trotzdem mechanisch genannt. Exakt ist aber diejenige, welche die gesuchte Größe eines Kreises oder Bogens exakt darstellt, und sie ist entweder *linien*- oder *zahlenmäßig*, nämlich durch das Ziehen von Linien oder den Ausdruck eines Wertes. Ein Wert kann entweder durch eine Quantität oder durch eine Folge von Quantitäten exakt ausgedrückt werden, deren Natur und Bildungsgesetz erkannt wird: durch eine Quantität, wenn man z.B. irgendeine Zahl, sei es eine rationale oder irrationale oder aber auch eine in einer gewissen Gleichung eingeschlossene algebraische, angäbe, durch die der Wert eines Kreisbogens ausgedrückt würde; durch eine Folge, wenn man zeigt, dass eine gewisse Folge, deren bis ins Unendliche gültige Bildungsgesetz gegeben wird, als ganze zugleich genommen den Wert des Bogens oder des Kreises exakt ausdrückt. Der erste Ausdruck wird von mir *analytisch* genannt, der zweite aber, wenn die Folge in rationalen Zahlen fortschreitet, scheint zu Recht mit dem Titel *arithmetische Quadratur* eingeschätzt werden zu können. Wenn ich z.B. sage: Wenn das Quadrat des Durchmessers 1 ist,

ist der Kreis gleich der gesamten Folge von abwechselnd positiven und negativen ungeraden Brüchen unter der Einheit, nämlich $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. bis ins Unendliche, wie in dieser kleinen Schrift bewiesen werden wird; daher kann nicht geleugnet werden, dass ein gewisser exakter Wert des Kreises und irgendein gänzlich wahrer Ausdruck seiner Größe gefunden worden ist. Denn von diesen Zahlen ist die Reihe selbst als ganze jedenfalls kein Nichts, denn sie kann vergrößert und verkleinert werden, viele Theoreme können über sie nachgewiesen werden. Und wie, um Himmels willen, ist es möglich, dass sie nichts ist, wenn sie den Wert des Kreises ausdrückt, außer wir meinen, dass dieser auch nichts ist. Wenn sie nun also irgendetwas ist, haben wir jedenfalls irgendeinen Wert des Kreises als einen exakten entdeckt. Und wenn jemand irgendwann eine Folge von Ziffern fände, durch welche der einmal erkannte Ausdruck des Ludolph ohne eine neue Berechnung bis ins Unendliche fortgesetzt werden könnte (dass eine derartige Folge jedenfalls durch eine gewisse bestimmte Regel feststeht, ist notwendig), was das Schönste wäre, so hätte dieser die arithmetische Quadratur des Kreises in ganzen Zahlen, wie wir sie in Brüchen gegeben haben. Aber ich meine, dass diese Regel auch die schwierigste sein wird und sehr zusammengesetzt, und dass sie ein weniger schönes Theorem aufzeigen wird als unsere, bei der eine gewisse wunderbare Einfachheit der Natur hervorleuchtet, dass eben jene Zahlen, die die Differenzen aller Quadrate der Reihe nach sind, das Verhältnis des Kreises zum Quadrat des Durchmessers ausdrücken, so dass wohl kaum ein analytischer Ausdruck des Kreises, der mit einer einzigen Quantität zu bilden ist, wenn man ihn irgendwann finden wird, schöner erscheinen

Praeterquam quod eadem regula non circulus tantum, sed et quaelibet ejus portio, nec circumferentia tantum, sed et quilibet arcus inveniatur, quod expressione analytica aequabili fieri impossibile est. Regula nostra generalis, adeoque *Quadratura Arithmetica* plena huc redit, ut Tangente, quae radio non major sit, posita *b*, radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major sit $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. Unde Trigonometrica problemata sine tabulis efficienda oriuntur. De quo postea.

Supersunt adhuc Quadraturae exactae duae, altera Linearis sive Geometrica, altera Analytica. Equidem nec omne Analyticum Geometricum est; possunt enim exprimi magnitudines quaedam, quae per cognitas artes non possunt ductis lineis exhiberi, contra lineae designari possunt instrumentis, quarum expressio nondum sit in potestate. Ostendam enim aliquando esse Lineas Geometricas, quae non minus facile ac Cartesianae motibus regularum certa quadam ratione incedentium describantur et aeque geometricae sint ac parabolae et hyperbolae, et ad certa quaedam problemata solvenda unice necessariae sint, calculo tamen ad aequationes quasdam certasque dimensiones revocari nequeant. Perfecta autem quadratura illa erit, quae simul sit Analytica et linearis, sive quae lineis aequabilibus, ad certarum dimensionum aequationes revocabilibus, construatur. Hanc impossibilem esse asseruit ingeniosissimus Gregorius in libro *de Vera Circuli Quadratura*, sed demonstrationem tunc quidem, ni fallor, non absolvit. Ego nondum video, quid impediat circumferentiam ipsam aut aliquam determinatam ejus portionem mensurari, et cujusdam arcus rationem ad suum sinum, certae dimensionis aequatione exprimi. Sed *relationem arcus ad sinum in universum aequatione certae dimensionis explicari impossibile est*, quemadmodum in ipso opusculo demonstrabo, unde et Corollarium hoc ducam:
„ Quadraturam plenam, analyticam, aequatione expressam, cujus terminorum
„ dimensiones sint numeri rationales, perfectiorem quam dedimus, cum arcum
„ quadrante non majorem diximus esse $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. posita
„ tangente ejus *b* et radio 1, reperiri non posse.“

wird. Abgesehen davon, dass durch dieselbe Regel nicht nur der Kreis, sondern auch ein beliebiger Teil von ihm, und nicht nur der Umkreis, sondern auch ein beliebiger Bogen gefunden werde, was unmöglich durch einen gleich bleibenden analytischen Ausdruck geschieht. Unsere allgemeine Regel und daher die *volle arithmetische Quadratur* läuft darauf hinaus, dass, wenn die Tangente, die nicht größer als der Radius sei, als b gesetzt ist, der Radius als Einheit, der Bogen selbst, der natürlich nicht größer als der Viertelkreis ist, $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. ist. Daraus ergeben sich trigonometrische Probleme, die ohne Tafeln zu bewältigen sind. Davon später.

Es bleiben noch zwei exakte Quadraturen übrig; die eine, die linienmäßige bzw. geometrische, die andere, die analytische. Allerdings ist nicht jedes Analytische etwas Geometrisches; es können nämlich gewisse Größen ausgedrückt werden, die mit Hilfe der bekannten Kunstgriffe nicht durch gezogenen Linien dargestellt werden können; andererseits können mit Instrumenten Linien aufgezeichnet werden, deren Ausdruck noch nicht zur Verfügung steht. Ich werde nämlich zeigen, dass es manchmal geometrische Linien gibt, die nicht weniger leicht als die cartesischen durch Bewegungen von Schienen, die auf eine gewisse bestimmte Weise vorrücken, beschrieben werden und ebenso geometrisch wie Parabeln und Hyperbeln sind, und die für einige bestimmte zu lösende Probleme einzig notwendig sind, die trotzdem nicht durch Rechnung auf gewisse Gleichungen und bestimmte Dimensionen zurückgeführt werden können. Vollkommen wird aber jene Quadratur sein, die zugleich analytisch und linienmäßig ist, bzw. die durch gleichwertige, auf Gleichungen von bestimmten Dimensionen zurückführbare Linien konstruiert wird. Dass diese unmöglich ist, hat der äußerst scharfsinnige Gregory in dem Buch *Über die wahre Quadratur des Kreises* behauptet, aber einen Beweis hat er damals jedenfalls, wenn ich mich nicht täusche, nicht zustande gebracht. Ich sehe noch nicht, was daran hindert, dass der Kreisumfang selbst oder irgendein festgelegter Teil von ihm gemessen wird, und dass das Verhältnis eines gewissen Bogens zu seinem Sinus durch eine Gleichung eines bestimmten Grades ausgedrückt wird. Aber *die Beziehung des Bogens zum Sinus im allgemeinen durch eine Gleichung eines bestimmten Grades zu erklären, ist unmöglich*, wie ich in dieser kleinen Schrift beweisen werde, weshalb ich auch als Korollar dies herleiten werde:
„ Als volle analytische, durch eine Gleichung ausgedrückte Quadratur, deren
„ Dimensionen der Terme rationale Zahlen seien, kann eine vollkommenere nicht
„ gefunden werden, als wir sie gegeben haben, wenn wir sagten, dass der Bogen,
„ der nicht größer als der Viertelkreis ist, $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. ist, wobei
„ seine Tangente b und der Radius 1 gesetzt ist.“

Qualiscunque enim dabitur, utique progredietur in infinitum, nam alioqui, ut ostensum est, vel non erit plena sive non quemlibet arcum exhibebit, vel erit certae ad summum dimensionis, quod absurdum esse demonstravimus. Quodsi jam progredietur in infinitum, hac utique, quam dedimus, perfectior non est. Commodiorem nostra ac simpliciorem esse forte possibile est, sed id parum moramur, praesertim cum ne verisimile quidem fiat, simpliciorem atque naturaliorem et quae mentem afficiat magis, salva generalitate, reperiri posse expressionem.

S e d r e l a t i o n e m a r c u s a d s i n u m i n u n i v e r s u m a e q u a t i o n e c e r t a e d i m e n s i o n i s e x p l i c a r i i m p o s s i b i l e e s t.

Quod facile sic demonstratur. Esto aequatio illa inventa gradus cujuscunque certi, verbi gratia, cubica, quadrato-quadratica, surdesolida seu gradus quinti, gradus sexti, et ita porro, ita scilicet ut maxima aliqua sit aequationis inventae dimensio, exponentem habens numerum finitum. Hoc posito, linea curva ejusdem gradus delineari poterit, ita ut abscissa exprimente sinus, ordinata exprimat arcus, vel contra. Hujus ergo lineae ope poterit arcus vel angulus in data ratione secari, sive arcus, qui ad datum rationem habeat datem, inveniri sinus; ergo problema sectionis anguli universalis certi erit gradus, solidum scilicet, aut sursolidum, aut alterius gradus altioris, quem scilicet natura vel aequatio hujus lineae dictae ostendet. Sed hoc absurdum est; constat enim tot esse varios gradus problematum, quot sunt numeri (saltem impares) sectionum: nam bisectio anguli est problema planum, trisectio problema solidum sive conicum, quinque sectio est problema surdesolidum, et ita porro in infinitum; altius fit problema prout major est numerus partium aequalium, in quas dividendus est angulus, quod apud Analyticos in confesso est, et facile probari posset universaliter, si locus pateretur. Impossibile est ergo relationem arcus ad sinum, in universum certa aequatione determinati gradus exprimi. Q. E. D.

Was für eine auch immer man nämlich geben wird, sie wird jedenfalls ins Unendliche fortschreiten, denn sonst, wie es gezeigt wurde, wird sie entweder keine volle sein bzw. einen beliebigen Bogen nicht darstellen, oder sie wird zu einer bestimmten Dimension beim höchsten Term gehören, was wir aber als etwas Widersinniges bewiesen haben. Wenn sie nun schon ins Unendliche fortschreiten wird, gibt es jedenfalls keine vollkommenere als die, die wir gegeben haben. Denn ihre Unvollkommenheit besteht darin, dass man bis ins Unendliche voranschreiten muss. Dass es eine bequemere und einfachere als unsere gibt, ist vielleicht möglich, aber daran stoßen wir uns wenig, vor allem, weil es nicht einmal wahrscheinlich ist, dass bei unverletzter Allgemeinheit ein einfacherer und naturgemäßerer Ausdruck, und einer, der den Geist mehr anregt, gefunden werden kann.

A b e r d i e B e z i e h u n g d e s B o g e n s z u m S i n u s i m A l l g e m e i n e n d u r c h e i n e G l e i c h u n g e i n e s b e s t i m m t e n G r a d e s z u e r k l ä r e n , i s t u n m ö g l i c h .

Das wird folgendermaßen leicht bewiesen. Sei jene gefundene Gleichung von einem beliebigen bestimmten Grad, z.B. kubisch, biquadratisch, surdesolide bzw. fünften Grades, sechsten Grades und so weiter, so nämlich, dass von der gefundenen Gleichung irgendeine Dimension die größte ist, die als Exponenten eine endliche Zahl hat. Unter dieser Voraussetzung wird man eine krumme Linie desselben Grades in der Weise zeichnen können, dass, während die Abszisse die Sinusse ausdrückt, die Ordinate die Bögen ausdrückt oder umgekehrt. Also wird man mit Hilfe dieser Linie einen Bogen oder einen Winkel in einem gegebenen Verhältnis teilen bzw. vom Bogen, der zu einem gegebenen ein gegebenes Verhältnis hat, den Sinus finden können; also wird das Problem der allgemeinen Winkelteilung das eines bestimmten Grades sein, nämlich ein solides oder sursolides oder das eines anderen höheren Grades, den ja die Natur oder die Gleichung dieser besagten Linie anzeigen wird. Aber das ist abwegig; es steht nämlich fest, dass es so viele verschiedene Grade bei dem Problem gibt wie Anzahlen (wenigstens ungerade) bei den Teilungen. Denn die Zweiteilung eines Winkels ist ein ebenes Problem, die Dreiteilung ein solides bzw. ein Kegelschnittproblem, die Fünfteilung ist ein *problema surdesolidum*, und so weiter bis ins Unendliche; das Problem wird ein höheres, je nachdem die Anzahl der gleichen Teile, in die ein Winkel geteilt werden soll, größer ist, was bei den Analytikern unzweifelhaft ist und allgemein leicht bewiesen werden könnte, wenn der Platz es zuließe. Unmöglich ist also, dass die Beziehung des Bogens zum Sinus im Allgemeinen durch eine bestimmte Gleichung eines festgelegten Grades ausgedrückt wird. Das war zu beweisen.