Material zu: Zyklisches Nummerieren in der Ebene
Quaterniäre bilaterale Gleichverteilung der ersten 4^n natürlichen Zahlen
Magische Quadrate mit 4^n Feldern

(Otto Hamborg, im April 2002)

Der Eid der Pythagoreer:

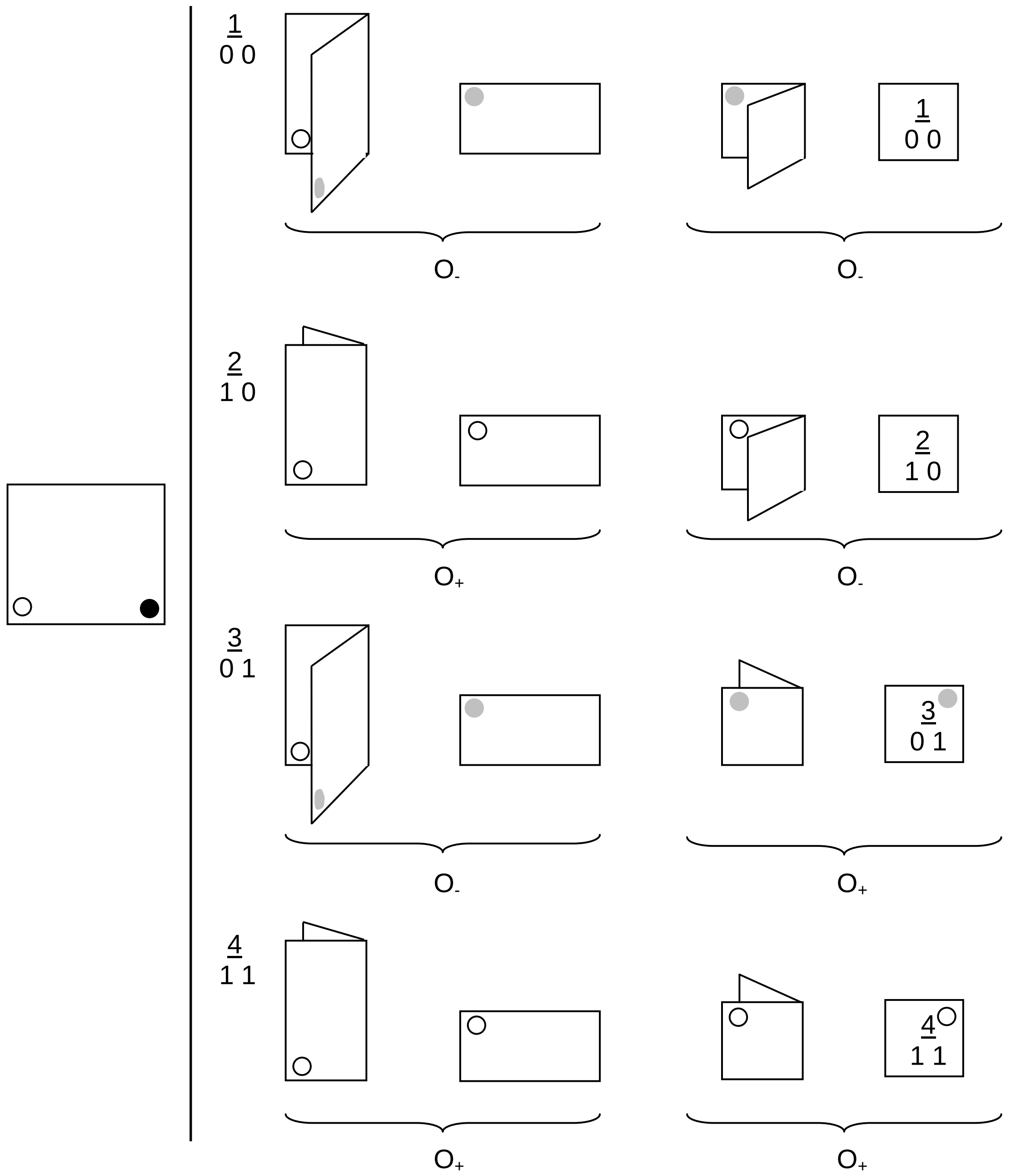
οὔ, μὰ τὸν ἁμετέραι ψυχᾶι
παραδόντα τετρακτύν,
Παγὰν ἀενάου φύσεως
ῥίζωμά τ᾽ ἔχουσαν.

1	2
4	3

Zahlenschema I

Nein, bei dem, der unserer Seele die Tetraktys übergeben hat, welche Quelle und Wurzel der ewigen Natur enthält.

$1 \leftrightarrow 00 = -\ - \leftrightarrow O_- \bullet O_-$
$2 \leftrightarrow 10 = +\ - \leftrightarrow O_+ \bullet O_-$
$3 \leftrightarrow 01 = -\ + \leftrightarrow O_- \bullet O_+$
$4 \leftrightarrow 11 = ++ \leftrightarrow O_+ \bullet O_+$



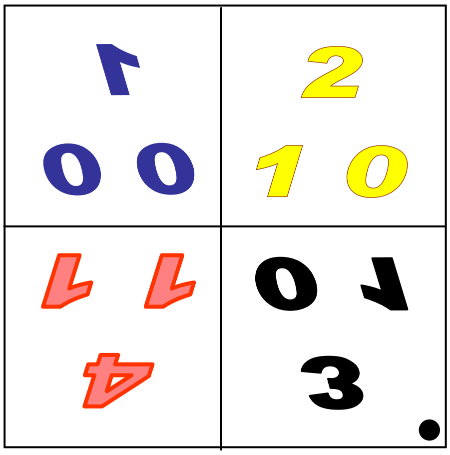
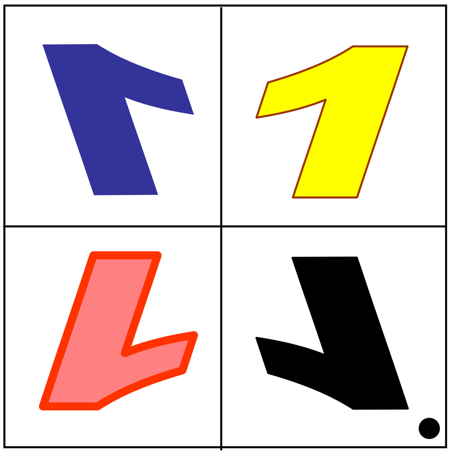


Bild I



Farbgestalt I

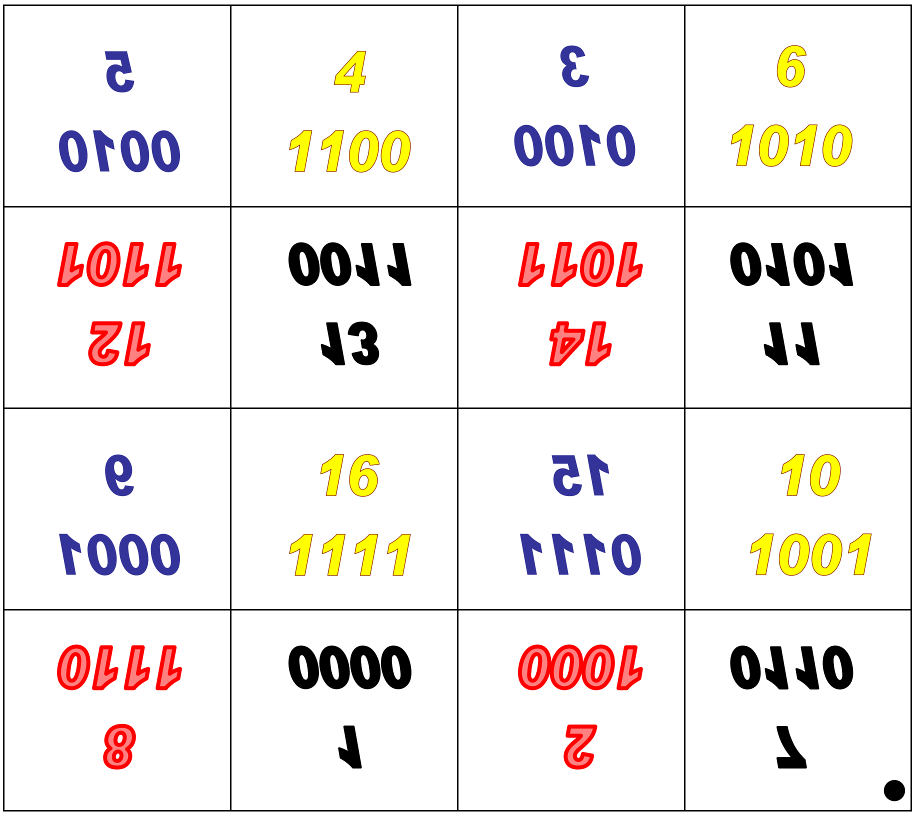
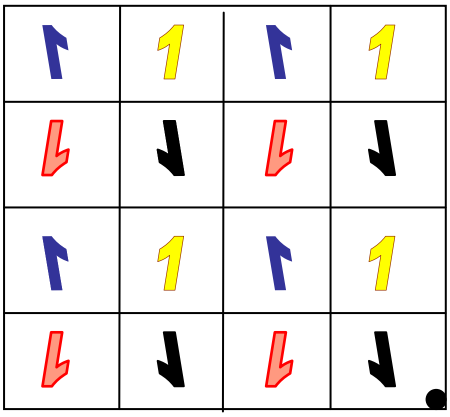


Bild II

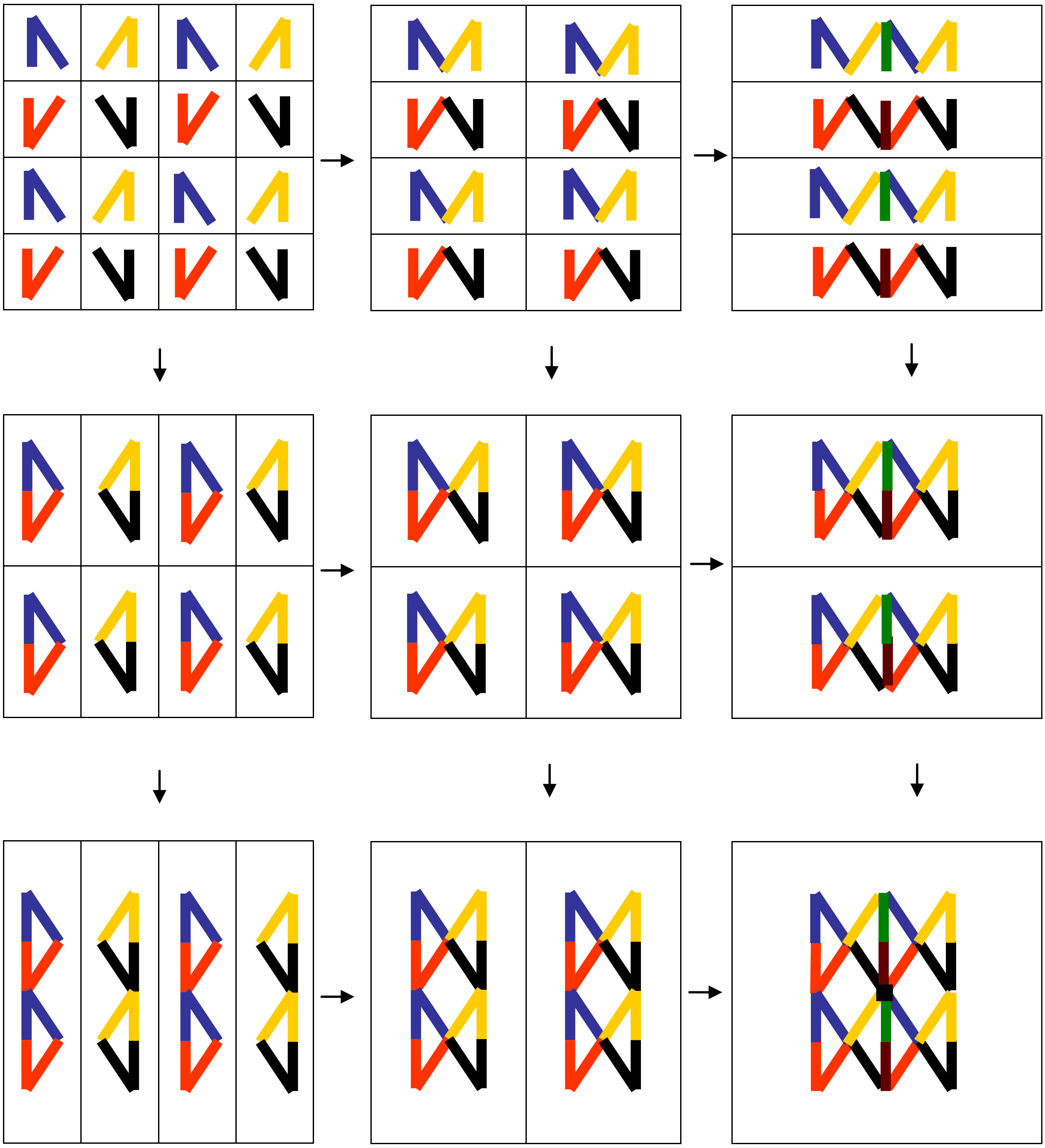
5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

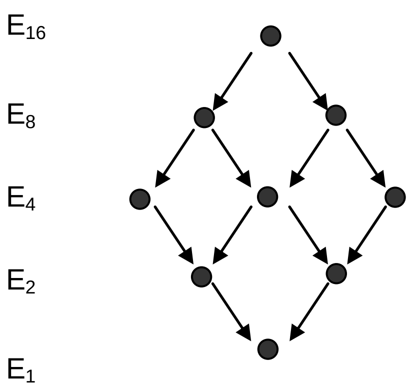
Zahlenschema II



Farbgestalt II

Lateralkombinationen





Der Weg zurück

44	53	52	45	46	51	54	43
21	12	13	20	19	14	11	22
28	5	4	29	30	3	6	27
37	60	61	36	35	62	59	38
40	57	64	33	34	63	58	39
25	8	1	32	31	2	7	26
24	9	16	17	18	15	10	23
41	56	49	48	47	50	55	42

9	7	5	11
23	25	27	21
17	31	29	19
15	1	3	13

5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

$\xrightarrow{|n-m|}$

1	3
7	5

$\xrightarrow{\frac{n+1}{2}}$

1	2
4	3

Zwei magische Quadrate $\overset{\subset\!\supset}{\mathbf{M}}$ mit 4^2 = 16 bzw. 4^3 = 64 Feldern

Konstruktionsprinzip:

1. Schritt
Herstellung einer quadratischen Anordnung der Zahlen von 1 bis 4^n, bei der die Spaltensummen gleich sind und nur zwei Zahlen als Zeilensummen auftauchen.

2. Schritt
Anwendung von zwei Spiegelungen, die schon im 1. Schritt benutzt wurden.

16 Felder

1. Die n x n Matrix $S_n = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ lässt sich interpretieren als

$$M_{m,n}\, S_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,n} & \cdots & a_{1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,n} & \cdots & a_{m,1} \end{pmatrix} = M^v_{m,n} \mathrel{\hat{=}} \text{Spiegelung an der Vertikalen}$$

und

$$S_n\, M_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \end{pmatrix} = M^h_{n,m} \mathrel{\hat{=}} \text{Spiegelung an der Horizontalen}$$

Nun werden zuerst die 4^2 Felder mit der Vierheit a, b, c, d markiert gemäß

$$M_{16} = \left.\begin{array}{cc|cc} a & b & b & a \\ \multicolumn{2}{c|}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} \\ d & c & c & d \\ \hline d & c & c & d \\ \multicolumn{2}{c|}{4} & \multicolumn{2}{c}{3} \\ a & b & b & a \end{array}\right. = \begin{array}{c|c} M_4 & M_4^v \\ \hline M_4^h & \left(M_4^v\right)^h \end{array}$$

und anschließend die Zahlen 1, ... , 16 in die k-ten Vierheiten eingetragen nach der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & + & u_k \\ 9 & - & u_k \\ 25 & + & u_k \\ 25 & - & u_k \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} u_k & = & 2k-1 \\ k & = & 1, \dots, 4 \end{array}$$

<u>Bemerkung</u>: An dieser Stelle sei schon darauf hingewiesen, dass die obige Zerlegung den Kern des Verfahrens ausmacht. Das hängt zusammen mit $\sum_1^{16} n = 8 \cdot 17 = \frac{25-9}{2} \cdot \frac{25+9}{2}$.

Somit ergibt sich

$$M_{16} = \begin{array}{cc|cc|l} 5 & 4 & 3 & 6 & 2\cdot 9 \\ 12 & 13 & 14 & 11 & 2\cdot 25 \\ \hline 9 & 16 & 15 & 10 & 2\cdot 25 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 2\cdot 9 \\ \hline 34 & 34 & 34 & 34 & \end{array}$$

2.

$$M_{16} = \begin{array}{c|c} M_4^1 & M_4^2 \\ \hline M_4^4 & M_4^3 \end{array} \quad \overset{S_2 M_4^i}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c|c} M_4^1 & M_4^{2h} \\ \hline M_4^4 & M_4^{3h} \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 5 & & 11 \\ 12 & & 6 \\ 9 & N_{4,2} & 7 \\ 8 & & 10 \end{array} = M_{16}^*$$

$$M_{16}^* = \begin{array}{c|cc|c} 5 & 4 & 14 & 11 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 9 & 16 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 15 & 10 \end{array} \quad \overset{N_{4,2}\, S_2}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c|c|c} 5 & & 11 \\ 12 & & 6 \\ 9 & N_{4,2}^v & 7 \\ 8 & & 10 \end{array} = M_{16}^{**}$$

$$M_{16}^{**} = \begin{array}{c|cc|c} 5 & 14 & 4 & 11 \\ 12 & 3 & 13 & 6 \\ 9 & 2 & 16 & 7 \\ 8 & 15 & 1 & 10 \end{array} = \overset{\subset\supset}{M}_{16}$$

<u>Bemerkung</u>: Die beiden Spiegelungen stehen in einer dualen Beziehung zueinander, die gerade in der <u>umgangssprachlichen Formulierung</u> deutlich wird.

$MS = M^v$:	Zwei vertikale Spiegelungen bzgl. der halben äußeren Achsen
$SM = M^h$:	Eine horizontale Spiegelung bzgl. der ganzen inneren Achse

In ähnlicher Weise kann man eine duale Beziehung zwischen dem arithmetischen und harmonischen Mittel ausdrücken durch ein Modell mit Ohmschen Widerständen:

M_a :	Parallelschaltung zweier Reihenschaltungen	
M_h :	Reihenschaltung zweier Parallelschaltungen	(vgl. Hamborg 1995)

Zwei verwandte magische Quadrate

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad \text{Es gilt:} \quad \mathbf{D}\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\a_1&a_2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\\a_4&b_4\end{pmatrix}\mathbf{D} = \begin{pmatrix}b_1&a_1\\b_2&a_2\\b_3&a_3\\b_4&a_4\end{pmatrix}$$

sgn $(\mathbf{X}_{m,n})$ = Vorzeichen aus der Matrix $(\mathbf{X}_{m,n}) = (\mathbf{L}_{ij})$ bzw. $(\mathbf{R}_{ij})$

I

$$\begin{matrix}5&4&3&6\\12&13&14&11\\9&16&15&10\\8&1&2&7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}5&4&14&11\\12&13&3&6\\9&16&2&7\\8&1&15&10\end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}5&14&4&11\\12&3&13&6\\9&2&16&7\\8&15&1&10\end{matrix}} = \mathbf{R} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}12&3&13&6\\5&14&4&11\\8&15&1&10\\9&2&16&7\end{matrix}} = \mathbf{L} \qquad \begin{array}{cccc|cccc} -&+&+&-&+&-&-&+\\ +&-&-&+&-&+&+&-\\ -&+&+&-&+&-&-&+\\ +&-&-&+&-&+&+&- \end{array}$$

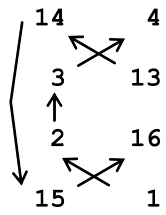
$$\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \begin{matrix}\mathbf{R}_O\\ \mathbf{R}_U\end{matrix} \rightarrow \bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \begin{matrix}\mathbf{DR}_O\\ \mathbf{DR}_U\end{matrix} = \bar{a}_1\ \mathbf{M}_R\ \bar{a}_4{}^* \rightarrow \bar{a}_1\ \mathbf{M}_R\mathbf{D}\ \bar{a}_4{}^* = \begin{pmatrix}\mathbf{O}\\ \mathbf{U}\end{pmatrix}_R \rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{DO}\\ \mathbf{DU}\end{pmatrix}_R = \mathbf{L} \qquad (\mathbf{R}_{ij}) \qquad (\mathbf{L}_{ij})$$

$$\mathbf{sgn}(\mathbf{L}_{ij})\mathbf{L}_{ij} + \mathbf{sgn}(\mathbf{R}_{i,5-j})\mathbf{R}_{i,5-j} = 1$$

$$\begin{matrix}\mathbf{L}_O\\ \mathbf{L}_U\end{matrix}\ \bar{a}_3\ \bar{a}_4 \rightarrow \begin{matrix}\mathbf{DL}_O\\ \mathbf{DL}_U\end{matrix}\ \bar{a}_3\ \bar{a}_4 = \bar{a}_1{}^*\ \mathbf{M}_L\ \bar{a}_4 \rightarrow \bar{a}_1{}^*\ \mathbf{M}_L\ \bar{a}_4 = \begin{pmatrix}\mathbf{O}\\ \mathbf{U}\end{pmatrix}_L \rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{DO}\\ \mathbf{DU}\end{pmatrix}_L = \mathbf{R} \qquad (\mathbf{L}_{ij}) \qquad (\mathbf{R}_{ij})$$

II

$$\begin{matrix}5&4&3&6\\12&13&14&11\\9&16&15&10\\8&1&2&7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}12&13&3&6\\5&4&14&11\\8&1&15&10\\9&16&2&7\end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}12&3&13&6\\5&14&4&11\\8&15&1&10\\9&2&16&7\end{matrix}} = \mathbf{L} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}5&14&4&11\\12&3&13&6\\9&2&16&7\\8&15&1&10\end{matrix}} = \mathbf{R} \qquad \begin{array}{cccc|cccc} +&-&-&+&-&+&+&-\\ -&+&+&-&+&-&-&+\\ +&-&-&+&-&+&+&-\\ -&+&+&-&+&-&-&+ \end{array}$$



5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

9	9
25	25
25	25
9	9

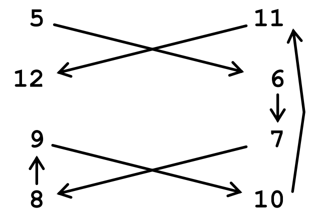
I

9	25
25	9
25	9
9	25

=

5	18	11
12	16	6
9	18	7
8	16	10

= **R**



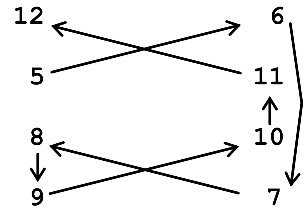
II

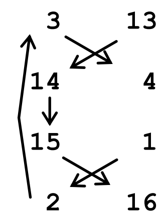
25	9
9	25
9	25
25	9

=

12	16	6
5	18	11
8	16	10
9	18	7

= **L**





64 = 4 · 16 Felder

1. Die Eintragung der 16 Vierheiten $(a, b, c, d)_k$, $k = 1, \dots, 16$ in M_{64} erfolgt entsprechend der Matrix M_{16} und ergibt zusammen mit dem sukzessiven Aufbau der Buchstabenanordnung das Bild a).
Das Schema b) M_{64} zeigt die Anordnung der Zahlen 1, ... , 64 , bei der alle Spaltensummen gleich 260 und alle Zeilensummen gleich 132 oder 388 sind, wenn die Belegung der Vierheiten gemäß der Formel

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 33 & + & u_k \\ 33 & - & u_k \\ 97 & + & u_k \\ 97 & - & u_k \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u_k & = & 2k-1 \\ k & = & 1, \dots, 16 \end{matrix}$$ erfolgt ist.

Bild a)

a		*b*	*b*		*a*	*a*		*b*	*b*		*a*
	5			4			3			6	
d		*c*	*c*		*d*	*d*		*c*	*c*		*d*
d		*c*	*c*		*d*	*d*		*c*	*c*		*d*
	12			13			14			11	
a		*b*	*b*		*a*	*a*		*b*	*b*		*a*
a		*b*	*b*		*a*	*a*		*b*	*b*		*a*
	9			16			15			10	
d		*c*	*c*		*d*	*d*		*c*	*c*		*d*
d		*c*	*c*		*d*	*d*		*c*	*c*		*d*
	8			1			2			7	
a		*b*	*b*		*a*	*a*		*b*	*b*		*a*

=

Schema b) M_{64}

21	12	13	20	19	14	11	22	$4 \cdot 33$
44	53	52	45	46	51	54	43	$4 \cdot 97$
37	60	61	36	35	62	59	38	$4 \cdot 97$
28	5	4	29	30	3	6	27	$4 \cdot 33$
25	8	1	32	31	2	7	26	$4 \cdot 33$
40	57	64	33	34	63	58	39	$4 \cdot 97$
41	56	49	48	47	50	55	42	$4 \cdot 97$
24	9	16	17	18	15	10	23	$4 \cdot 33$

$$4 \cdot 65 = 260$$

2. Acht Spiegelungen $S_2 M_4^i = M_4^{ih}$ an vier horizontalen Viertelachsen ergeben M_{16}^*

	M_4^4		M_4^6
	M_4^{13}		M_4^{11}
	M_4^{16}		M_4^{10}
	M_4^1		M_4^7

$\bar{a}_1$ $\bar{a}_2$ $\bar{a}_3$ $\bar{a}_4$ $\bar{a}_5$ $\bar{a}_6$ $\bar{a}_7$ $\bar{a}_8$

M_{16}

$\xrightarrow{S_2 M_4^i}$ $\quad \xrightarrow{S_2}$

12	52	45	14	54	43
53	13	20	51	11	22
60	4	29	62	6	27
5	61	36	3	59	38
8	64	33	2	58	39
57	1	32	63	7	26
56	16	17	50	10	23
9	49	48	15	55	42

$\bar{a}_1$ $N_{8,2}^1$ $\bar{a}_4^*$ $\bar{a}_5$ $N_{8,2}^2$ $\bar{a}_8^*$

M_{16}^*

a	b b	a a	b b	a
d d	c c c c	d d d d	c c c c	d d
a a	b b b b	a a a a	b b b b	a a
d d	c c c c	d d d d	c c c c	d d
a	b b	a a	b b	a

21	12 13 25	20 19 39	14 11 25	22
44 37 81	53 52 60 61 113 113	45 46 36 35 81 81	51 54 62 59 113 113	43 38 81
28 25 53	9 5 4 8 1 9	29 30 32 31 61 61	9 3 6 2 7 9	27 26 53
40 41 81	57 64 56 49 113 113	33 34 48 47 81 81	63 58 50 55 113 113	39 42 81
24	25 9 16	35 17 18	25 15 10	23

Zwei Spiegelungen $N^{i}_{8,2}\ S_2 = N^{iv}_{8,2}$ an zwei vertikalen ganzen Achsen

stellen nun das magische Quadrat $\overset{\subset\supset}{M}_{64}$ her.

21	52	12	45	19	54	14	43
44	13	53	20	46	11	51	22
37	4	60	29	35	6	62	27
28	61	5	36	30	59	3	38
25	64	8	33	31	58	2	39
40	1	57	32	34	7	63	26
41	16	56	17	47	10	50	23
24	49	9	48	18	55	15	42
$\vec{a}_1$	$N^{1*}_{8,2}$		$\vec{a}^{*}_4$	$\vec{a}_5$	$N^{2*}_{8,2}$		$\vec{a}^{*}_8$

$$= \overset{\subset\supset}{M}_{64}$$

<u>Bemerkung</u>: Das Quadrat $\overset{\subset\supset}{M}_{64}$ entsteht also dadurch, dass bei $M_{64} = \begin{array}{c|c} M^{1}_{16} & M^{2}_{16} \\ \hline M^{4}_{16} & M^{3}_{16} \end{array}$ die Buchstaben in jedes M^{i}_{16} wie in M_{16} eingetragen werden, die dann gemäß der Formel für die 16 Vierheiten belegt werden. Anschließend wird jedes M^{i}_{16} wie M_{16} behandelt.

a	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**
d	**c**	**c**	**d**	**d**	**c**	**c**	**d**
d	**c**	**c**	**d**	**d**	**c**	**c**	**d**
a	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**
a	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**
d	**c**	**c**	**d**	**d**	**c**	**c**	**d**
d	**c**	**c**	**d**	**d**	**c**	**c**	**d**
a	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**

<table>
<tr><td>21</td><td>25</td><td>20</td><td>19</td><td>25</td><td>22</td></tr>
<tr><td rowspan="2">81</td><td>105</td><td rowspan="2">81</td><td rowspan="2">81</td><td>105</td><td rowspan="2">81</td></tr>
<tr><td>121</td><td>121</td></tr>
<tr><td>28</td><td>9</td><td>29</td><td>30</td><td>9</td><td>27</td></tr>
<tr><td>25</td><td>9</td><td>32</td><td>31</td><td>9</td><td>26</td></tr>
<tr><td rowspan="2">81</td><td>121</td><td rowspan="2">81</td><td rowspan="2">81</td><td>121</td><td rowspan="2">81</td></tr>
<tr><td>105</td><td>105</td></tr>
<tr><td>24</td><td>25</td><td>17</td><td>18</td><td>25</td><td>23</td></tr>
</table>

Mit 9, 25 und 49 = 21 + 28 = 20 + 29 = ..., 81, 121 und 169 = 105 + 2^6

tauchen aus den 64 = 2^6 Feldern die ersten 6 ungeraden Quadratzahlen auf.

Eine andere "maximale" Anordnung der Schachfiguren

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	**T**	**S**	**L**	**D**	**K**	**L**	**S**	**T**
7	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**
6								
5								
4								
3								
2	B	B	B	B	B	B	B	B
1	T	S	L	D	K	L	S	T

K	T	**T**	K	B	B	B	B
D	**T**	T	**D**	B	B	B	B
L	S	**S**	L	B	B	B	B
L	**S**	S	**L**	B	B	B	B

lineare Zählweise

8	16	24	32	40	48	56	64
7	15	23	31	39	47	55	63
2	10	18	26	34	42	50	58
1	9	17	25	33	41	49	57

zyklisch-planare Zählweise

40	57	64	33	34	63	58	39
25	8	1	32	31	2	7	26
24	9	16	17	18	15	10	23
41	56	49	48	47	50	55	42