Zur Wiederholung

Aufgabe 1.8: *Für welche reellen Zahlen gelten die Ungleichungen?*

(1) $|x-1|+2x>1$ (2) $|3x-2| \le 3|x+3|$

(3) $|x+2|+2|x-3|-|x| \le 3$ (4) $\dfrac{1}{x+3} < \dfrac{2}{x-4}$

Aufgabe 1.14: *Die Funktion* $y=f(x)=3|x-1|+2|x+2|,\ x\in\mathbb{R}$, *aus der Aufgabe 1.13 ist auf Beschränktheit zu untersuchen. Geben Sie Schranken für diese Funktion an.*

Aufgabe 1.18: *Berechnen Sie die Funktionswerte* $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ *und geben Sie die Produktdarstellung der folgenden Polynome an.*

(1) $f(x)=x^4-4x^3+x^2+12x-12$ (2) $f(x)=x^4-3x^3+2x$

Aufgabe 2.8: *Bestimmen Sie den Betrag, den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahlen. Weiterhin sind die Eulersche und trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen gesucht.*

(1) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{-1+\mathbf{i}}$ (2) $\dfrac{1}{-2+5\mathbf{i}}$ (3) $\dfrac{-3+2\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}$ (4) $(1+2\mathbf{i})^4$.

Aufgabe 2.9: *Berechnen Sie*

$z_1+z_2,\quad |z_1|,\quad |z_2|,\quad \overline{z_1},\quad \overline{z_2},\quad z_1\cdot z_2,\quad \dfrac{z_1}{z_2},\quad (z_1)^{20},\quad \sqrt[4]{z_2}\,,$ *wobei*

(1) $z_1=3+4\mathbf{i}$, $z_2=-2+5\mathbf{i}$ (2) $z_1=-3+\mathbf{i}$, $z_2=4+2\mathbf{i}$

(3) $z_1=\mathrm{e}^{2\mathbf{i}}$ $z_2=3\,\mathrm{e}^{-5\mathbf{i}}$ (4) $z_1=5\,\mathrm{e}^{1{,}5\mathbf{i}}$ $z_2=4\,\mathrm{e}^{2\mathbf{i}}$.

Aufgabe 3.4: *Für die Vektoren* $\vec a=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec b=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ *und* $\vec c=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$

sind folgende Terme zu berechnen:

(1) $2\vec a+3\vec b$, (2) $\vec c-\vec b$, (3) $2\vec a-\vec c+2\vec b$,
(4) $\vec c\times\vec b$, (5) $(\vec a+\vec b)\times\vec c$, (6) $\vec a+(\vec b\times\vec c)$.
(7) *Die Projektion* $\vec b_{\vec a}$ *des Vektors* $\vec b$ *auf den Vektor* $\vec a$.
(8) *Die Projektion* $\vec c_{xz}$ *des Vektors* $\vec c$ *auf die xz-Ebene und die Projektion* $\vec c_z$ *des Vektors* $\vec c$ *auf die z-Achse.*
(9) *Die Richtungskosinus von* $\vec c$.
(10) *Das Spatprodukt* $[\vec c\,\vec b\,\vec a]$.

Aufgabe 3.12: *Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck mit den Eckpunkten* $P_1(1;0;6)$, $P_2(4;5;-2)$ *und* $P_3(-2;3;4)$ *?*

Aufgabe 3.13: *Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ *aufgespannt wird.*

Aufgabe 3.20: *Die Ebene* E *enthalte den Punkt* $P_1 = P_1(0; 1; -2)$ *und die Gerade* $g : \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. *Geben Sie eine parameterfreie Darstellung der Ebene* E *an. Welchen Abstand hat die Ebene* E *vom Koordinatenursprung?*

Aufgabe 3.22: *Geben Sie die Gleichung der Ebene* E *an, auf der der Vektor* $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ *senkrecht steht und die den Punkt* $P_0(-2; -1; 1)$ *enthält. Welche Abstände haben die Punkte* $P_1(-1; 0; 2)$ *und* $P_2(-1; -1; 1)$ *von* E*?*

Aufgabe 4.4: *Gegeben sind die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A+B)C$, $AC+BC$, $(AB)C$, $A(BC)$, $(AB)^T$ *und* $B^T A^T$.

Aufgabe 4.5: *Bestimmen Sie* u *und* v *so, dass für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ u & v \end{pmatrix}$$

die Eigenschaft $AB = BA$ *gilt. (Matrizen, die diese Eigenschaft erfüllen, nennt man vertauschbar.)*

Aufgabe 4.10: *Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme lösbar sind. Bei Lösbarkeit ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems zu berechnen.*

$$(1)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & & & = & -45 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -20 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -58 \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 13 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \end{array}.$$

Aufgabe 4.12: *Von folgenden Matrizen ist die inverse Matrix zu berechnen, falls diese existiert.*

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.13: *Für welche Werte des Parameters* $a \in \mathbb{R}$ *ist die Matrix*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? Unter der Voraussetzung, dass die inverse Matrix existiert, ist B^{-1} *zu berechnen.*