Potenzreihen

Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenz-bereich
$(1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ [1])	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$	$\|x\| < 1$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$	$\|x\| < \infty$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$	$\|x\| < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \cdots$	$\|x\| < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$	$\|x\| \leqq 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$	$\|x\| \leqq 1$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\|x\| \leqq 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\|x\| < \infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$	$-1 < x \leqq 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$	$\|x\| < 1$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$\|x\| < \infty$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\|x\| < \infty$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - + \cdots$	$\|x\| \leqq 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$	$\|x\| < 1$

[1]) Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so hat die Reihe nur endlich viele (nämlich $\alpha + 1$) Glieder, da dann $\binom{\alpha}{\alpha+k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.