Tangentenverfahren von Newton

Ausgehend von einem *geeigneten* Startwert x_0 , der die Konvergenzbedingung

$$\left|\frac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{\left[f'(x_0)\right]^2}\right| < 1$$

erfüllt, erhält man aus der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine Folge von Näherungswerten x_0, x_1, x_2, …, die gegen die gesuchte Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ konvergiert.

Beispiel für das Newtonsche Tangentenverfahren

Die Lösungen der *transzendenten* Gleichung $x^2 + 2 = e^x$ können als Abszissenwerte der Schnittpunkte von $y_1 = x^2 + 2$ und $y_2 = e^x$ aufgefaßt werden. Aus der graphischen Darstellung in Bild IV-44 folgt, daß *genau eine* Lösung in der Nähe von $x_0 = 1{,}5$ existiert.

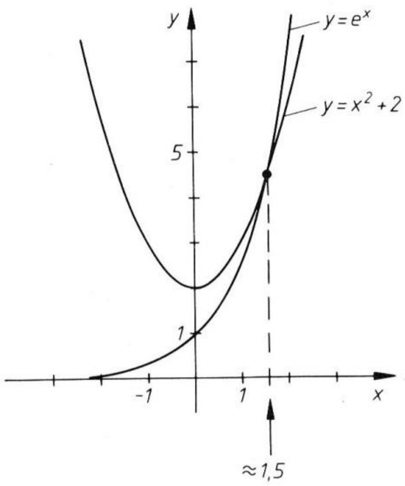

Bild IV-44
Graphische Ermittlung einer Näherungslösung der Gleichung $x^2 + 2 = e^x$

Dieser Wert ist als Startwert *geeignet:*

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x \quad \Rightarrow \quad f(1{,}5) = -0{,}2317$$
$$f'(x) = 2x - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(1{,}5) = -1{,}4817$$
$$f''(x) = 2 - e^x \quad \Rightarrow \quad f''(1{,}5) = -2{,}4817$$

$$\left|\frac{f(1{,}5)\cdot f''(1{,}5)}{[f'(1{,}5)]^2}\right| = \left|\frac{(-0{,}2317)\cdot(-2{,}4817)}{(-1{,}4817)^2}\right| = 0{,}2619 < 1$$

Mit der Iterationsvorschrift (IV-88) berechnen wir die ersten *Näherungswerte:*

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1,5	− 0,2317	− 1,4817	1,3436
1	1,3436	− 0,0276	− 1,1456	1,3195
2	1,3195	− 0,0005	− 1,1026	1,3190
3	1,3190	+ 0,0000	—	—

Die *einzige* Lösung der *transzendenten* Gleichung $x^2 + 2 = e^x$ liegt daher bei $x_3 = 1{,}3190$.