Eigenwerte, Eigenvektoren, Kegelschnitte

Aufgabe 4.21: *Berechnen Sie die Eigenwerte und (normierten) Eigenvektoren von folgenden Matrizen.*

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-4&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}\qquad (2)\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4: *Bestimmen Sie das geometrische Gebilde, das durch folgende Kurven beschrieben wird.*
Skizzieren Sie die Kurven in einem kartesischen Koordinatensystem.

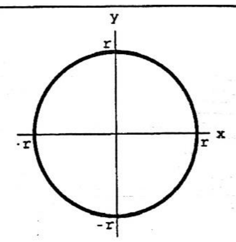
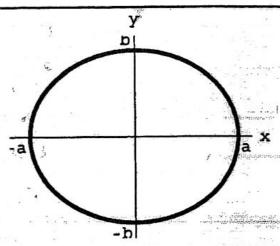
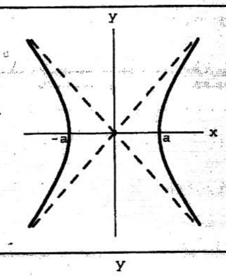
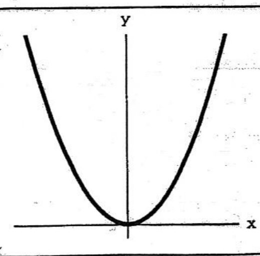
(1) $F(x;y)=6x^2+8y-4x-4xy+3y^2-6=0$

(2) $F(x;y)=175-130x+9x^2+90y-24xy+16y^2=0$

(3) $F(x;y)=5x^2+5y^2+x+2y-2=0$

(4) $F(x;y)=5x^2-6xy-3y^2-38y-2x-43=0.$

Kegelschnitte in Normalform

Kegelschnitt	Darstellungsform	Graph
Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung	$x^2+y^2=r^2$ oder $\left.\begin{array}{l}x=x(t)=r\cdot\cos(t)\\y=y(t)=r\cdot\sin(t)\end{array}\right\},\ t\in[0;2\pi]$	
Ellipse mit den Halbachsen a und b, die Halbachsen liegen auf den Koordinatenachsen	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ oder $\left.\begin{array}{l}x=x(t)=a\cdot\cos(t)\\y=y(t)=b\cdot\sin(t)\end{array}\right\},\ t\in[0;2\pi]$	
Hyperbel mit den Asymptoten $y=\pm\frac{b}{a}x$, die im Bild gestrichelt gezeichnet sind	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ oder $\left.\begin{array}{l}x=x(t)=a\cdot\cosh(t)\\y=y(t)=b\cdot\sinh(t)\end{array}\right\},\ t\in[0;2\pi]$	
Parabel (im Bild $a>0$)	$y=a\,x^2$	

Lösungen:

4.21: (1) $\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4,$

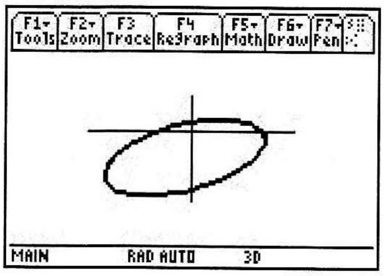
$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(2) $\lambda_1 = -1,\ \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 5,\ \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.4:

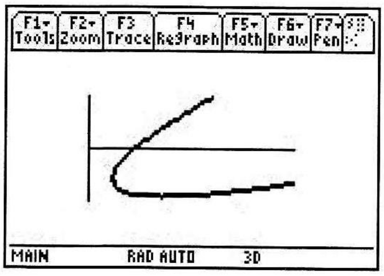
(1) Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7,$
Mittelpunkt: $P = P(-\frac{1}{7}; -\frac{10}{7}),$

$\Rightarrow$ Ellipse,



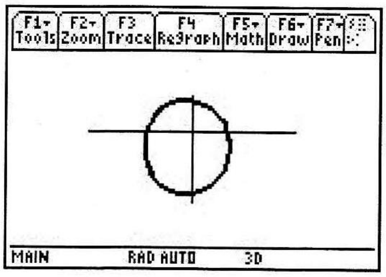
(2) Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25,$

Parabel,



(3) Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 5,$
Mittelpunkt: $P = P(-0,1; -0,2),$

$\Rightarrow$ Kreis (Ellipse),



(4) Eigenwerte von A: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -4,$
Mittelpunkt: $P(-2,25; -4,0833),$

$\Rightarrow$ Hyperbel