Lineare Gleichungssysteme, Inverse Matrizen

Aufgabe 4.8: *Gesucht ist der Rang der folgenden Matrizen*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.9: *Untersuchen Sie die linearen Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung an. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.*

$$(1)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -2 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ -2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}.$$

Aufgabe 4.10: *Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme lösbar sind. Bei Lösbarkeit ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystems zu berechnen.*

$$(1)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & & & = & -45 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -20 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -58 \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 13 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \end{array}.$$

Aufgabe 4.11: *Geben Sie die allgemeine Lösung X der folgenden linearen Gleichungssysteme $AX = B$ an.*

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 13 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.12: *Von folgenden Matrizen ist die inverse Matrix zu berechnen, falls diese existiert.*

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.13: *Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? Unter der Voraussetzung, dass die inverse Matrix existiert, ist B^{-1} zu berechnen.

Lösungen:

4.8: $\mathrm{Rg}(C) = 3, \quad \mathrm{Rg}(D) = 2.$

4.9: (1) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 2,\ n = 3 \Longrightarrow$ lösbar, eine Veränderl. frei wählbar:
$x = \frac{-4+4t}{7},\ y = \frac{5+2t}{7},\ z = t,\ t \in \mathbb{R},$
zwei sich schneidende Ebenen,
(2) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 1,\ n = 3 \Longrightarrow$ lösbar, zwei Veränderl. frei wählbar:
$x = \frac{1}{2}\big(-1 - s + t\big),\ y = s,\ z = t,\ s, t \in \mathbb{R},$
zwei zusammenfallende Ebenen.

4.10: (1) $\mathrm{Rg}(A|B) = 4,\ \mathrm{Rg}(A) = 3 \Longrightarrow$ nicht lösbar,
(2) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 3,\ n = 3 \Longrightarrow$ eindeutig lösbar,
$x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,$
(3) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 3,\ n = 4 \Longrightarrow$ lösbar, eine Veränderl. frei wählbar:
$x_1 = 15 - 11t,\ x_2 = 1 + t,\ x_3 = -5 + 5t,\ x_4 = t,\ t \in \mathbb{R},$

4.11: (1) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 3,\ n = 5 \Longrightarrow$ lösbar, zwei Veränderl. frei wählb.:
$x_1 = 1 - 1,5t + 5s,\ x_2 = 2 + \frac{1}{3}t - \frac{7}{3}s,\ x_3 = -3 + \frac{11}{12}t - \frac{13}{6}s,\ x_4 = t,\ x_5 = s,$
$t, s \in \mathbb{R},$
(2) $\mathrm{Rg}(A|B) = 3,\ \mathrm{Rg}(A) = 2 \Longrightarrow$ nicht lösbar,
(3) $\mathrm{Rg}(A|B) = \mathrm{Rg}(A) = 2,\ n = 3 \Longrightarrow$ lösbar, eine Veränderl. frei wählb.:
$x_1 = -8,5 + 10,5t,\ x_2 = 6 - 9t,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R},$

4.12: (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}, \qquad$ (2) $B^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$

(3) C^{-1} existiert nicht.

4.13: Für $a \neq -\frac{4}{3}$ gilt $B^{-1} = \frac{1}{4+3a}\begin{pmatrix} 3a & 8 & -6 \\ -2a & a-4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$