Matrizen

Aufgabe 4.1: *In der Landkarte, die im Bild 4.1 dargestellt ist, sind die Entfernungen (in km) zwischen benachbarten Orten angegeben. Es sind die kürzesten Entfernungen zwischen den Orten O_1 bis O_5 zu ermitteln und in Form einer Matrix (Entfernungsmatrix) aufzuschreiben. Welche Eigenschaften hat diese Matrix?*

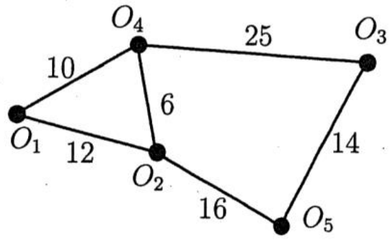

Bild 4.1: *Landkarte*

Aufgabe 4.2: *Für die Matrizen* A *und* C *aus dem Beispiel 4.1 ist* $A + C^T$ *zu berechnen.*

Beispiel 4.1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

bezeichnen Matrizen. Welche der Additionen $A + B$ *und* $A + C$ *sind erklärt? Falls die Summe existiert, ist diese zu berechnen.*

Aufgabe 4.3: *Für die Matrizen* $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

sind, falls möglich, folgende Matrizen zu berechnen:

$A_1 + A_2, \quad 3A_1 + 2A_2, \quad A_1^T + A_2^T, \quad A_5A_5, \quad A_5^TA_5, \quad A_5A_5^T, \quad A_6^TA_1, \quad A_6^TA_1A_6.$

Aufgabe 4.4: *Gegeben sind die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A+B)C$, $AC+BC$, $(AB)C$, $A(BC)$, $(AB)^T$ *und* B^TA^T.

Aufgabe 4.5: *Bestimmen Sie* u *und* v *so, dass für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ u & v \end{pmatrix}$$

die Eigenschaft $AB = BA$ *gilt. (Matrizen, die diese Eigenschaft erfüllen, nennt man vertauschbar.)*

Aufgabe 4.6: *Gegeben sei die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. *Ermitteln Sie die Lösung* X *der Matrizengleichung*

(1) $AX^T - X^T = 2A$ *und* (2) $2 \cdot X + X^T = A$.

Hinweis: Im ersten Schritt ist der Typ der unbekannten Matrix X *zu ermitteln.*

Aufgabe 4.7: *In einem Betrieb werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 fünf Zwischenprodukte $Z_1, ..., Z_5$ hergestellt, aus diesen Zwischenprodukten werden schließlich drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 gefertigt. In den Tabellen sind die Rohstoff- bzw. Zwischenproduktverbrauchsnormen zur Produktion einer Einheit Z_i bzw. einer Einheit von E_j angegeben.*

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
R_1	3	4	2	6	1
R_2	5	0	3	1	2
R_3	1	2	4	0	6
R_4	1	3	1	3	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	4	1
Z_2	1	3	6
Z_3	5	1	0
Z_4	0	2	3
Z_5	3	1	2

Wie viel Einheiten R_1, R_2, R_3, R_4 sind bereitzustellen, wenn der Betrieb 100 Einheiten von E_1, 200 Einheiten von E_2 und 300 Einheiten von E_3 herstellen soll?

Lösungen:

4.1: $\begin{pmatrix} 0 & 12 & 35 & 10 & 28 \\ 12 & 0 & 30 & 6 & 16 \\ 35 & 30 & 0 & 25 & 14 \\ 10 & 6 & 25 & 0 & 22 \\ 28 & 16 & 14 & 22 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix.

4.2: $A + C^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 14 & 5 \end{pmatrix}$.

4.3: $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $3A_1 + 2A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 18 & 20 \\ -3 & -1 & 10 \\ 5 & 20 & 5 \end{pmatrix}$,

$A_1^T + A_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A_5^T A_5 = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 5 \\ 30 & 40 & 10 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$,

$A_5\, A_5$ existiert nicht,

$A_5\, A_5^T = \begin{pmatrix} 56 & 22 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$, $A_6^T A_1 = (-3 \;\; 13 \;\; 12)$, $A_6^T A_1 A_6 = 60$.

4.4: $(A+B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 51 & 8 \\ 48 & -23 \end{pmatrix}$,

$(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 38 & 27 \\ 48 & -104 \\ 82 & -126 \end{pmatrix}$, $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -12 \\ 3 & 18 & 24 \\ -2 & 20 & 26 \end{pmatrix}$.

4.5: $u = 9,\ v = 7$. **4.6:** (1) $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, (2) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4.7: x_i bezeichne die Anzahl der Einheiten von R_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24200 \\ 12100 \\ 15700 \\ 13400 \end{pmatrix},$$

d.h., 24200 Einheiten von R_1, 12100 Einheiten von R_2, 15700 Einheiten von R_3 und 13400 Einheiten R_4 werden benötigt.