Vektoren (Fortsetzung)

Aufgabe 3.17 : *Die Punkte* $P_1(-1;0;2)$ *und* $P_2(1;1;2)$ *liegen auf der Geraden* g. (1) *Liegt der Punkt* $P_3(1;2;3)$ *auf der Geraden* g*?*
(2) *Bestimmen Sie* a *so, dass der Punkt* $P_4(a;2;2)$ *auf der Geraden* g *liegt.*

Aufgabe 3.18 : *Die Gerade* g_1 *verläuft durch die Punkte* $P_1(1;1;2)$ *und* $P_2(1;-1;2)$. *Gesucht ist die Gleichung der Geraden* g_2, *die durch den Punkt* $P_3(1;2;0)$ *geht und parallel zu der Geraden* g_1 *ist.*

Aufgabe 3.19: *Zwei nicht parallele Geraden, die sich nicht schneiden, heißen windschief. Wie erkennt man, ob die Geraden* $g_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + t\,\vec{a}_1,\ t \in \mathbb{R}$, *und* $g_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_2 + t\,\vec{a}_2,\ t \in \mathbb{R}$, *windschief sind?*

Aufgabe 3.20: *Die Ebene* E *enthalte den Punkt* $P_1 = P_1(0;1;-2)$ *und die Gerade* $g : \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$. *Geben Sie eine parameterfreie Darstellung der Ebene* E *an. Welchen Abstand hat die Ebene* E *vom Koordinatenursprung?*

Aufgabe 3.21 : *Geben Sie eine Gleichung der Ebene* E *an, die vom Koordinatenursprung drei Längeneinheiten entfernt ist und den Normalenvektor* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *hat.*

Aufgabe 3.22: *Geben Sie die Gleichung der Ebene* E *an, auf der der Vektor* $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ *senkrecht steht und die den Punkt* $P_0(-2;-1;1)$ *enthält. Welche Abstände haben die Punkte* $P_1(-1;0;2)$ *und* $P_2(-1;-1;1)$ *von* E*?*

Aufgabe 3.23: *Bestimmen Sie die Ebene, die die Punkte* $P_1(1;-3;1)$, $P_2(2;1;-2)$ *und* $P_3(-1;3;2)$ *enthält. Liegt* $P_4(1;1;1)$ *in dieser Ebene?*

Aufgabe 3.24 : *Gegeben sei die Ebene* $E : x + y - z = 3$. *Geben Sie die Gleichung der Ebene* E_0 *an, die auf* E *senkrecht steht und die Punkte* $P_1(1;1;1)$ *und* $P_2(0;1;0)$ *enthält.*

Aufgabe 3.25 : *Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden* g, *die den Punkt* $P_0(1;-2;3)$ *enthält und parallel zum Vektor* $\vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ *verläuft. Wo und unter welchem Winkel schneidet* g *die Ebene* $x+y+z=9$*?*

Aufgabe 3.26: *Geben Sie die Schnittgerade* g *der beiden Ebenen*

$$E_1 :\ x+y+z=1 \quad \text{und} \quad E_2 :\ 2x-y+2z=2$$

in Parameterdarstellung an. Welchen Abstand hat $P_0(0;1;1)$ *von* g*?*

Aufgabe 3.27: *Gegeben ist die Ebene* $E : -3x+4y-12z=26$. *Bestimmen Sie den Abstand* h_E *der Ebene* E *vom Koordinatenursprung, den Abstand* h_0 *des Punktes* $P_0(4;22;-24)$ *von* E, *die Gleichung der Geraden* g_0, *die durch* P_0 *geht und senkrecht auf* E *steht, und den Schnittpunkt* P_S *von* g_0 *mit* E.

Aufgabe 3.28 : *Die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten* $P_1(3;5;-1)$, $P_2(1;-1;-3)$ *und* $P_3(1;3;-1)$ *werde senkrecht auf die Ebene* $E: x+2y-z=2$ *projiziert. Von dem projizierten Dreieck sind die Eckpunkte und der Flächeninhalt gesucht.*
Bemerkung: Die projizierte Dreiecksfläche ist als Schattenfläche interpretierbar. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Licht in Projektionsrichtung einfällt.

Aufgabe 3.29: *Senkrecht über dem Punkt* $P_0(1;2;0)$ *der xy-Ebene befindet sich eine Punktmasse auf der Ebene* $E: x-2y+3z=12$. *Längs welcher Geraden* g *bewegt sich die Punktmasse infolge der in Richtung der negativen z-Achse wirkenden Schwerkraft herab und wo trifft sie die xy-Ebene?*

Aufgabe 3.30: *Der Punkt* $P_0(1;2;-1)$ *wird an der Ebene* E *gespiegelt, die durch die Punkte* $P_1(2;1;3)$, $P_2(-1;0;1)$ *und* $P_3(-1;2;-1)$ *aufgespannt wird. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunktes?*

Aufgabe 3.31: *Vom Punkt* $P(2;2;2)$ *aus wird ein Massenpunkt auf die Ebene* $E: x-2y+3z=1$ *geschossen. An dieser Ebene wird der Massenpunkt reflektiert. Auf welchen Punkt* Q *der Ebene* E *muss gezielt werden, wenn der Massenpunkt nach der Reflektion auf den Punkt* $R(5;0;5)$ *treffen soll?*
Bemerkung: Der Massenpunkt bewegt sich stets geradlinig fort. Beim Aufprall auf die Ebene stimmt der Einfallswinkel mit dem Ausfallswinkel überein.

Aufgabe 3.32: *Für die Vektoren* $\vec{a}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\5\\0\\2\end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{2}\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$ *sind die Teilaufgaben* (1) - (7) *aus dem Beispiel 3.13 zu lösen.*

Beispiel 3.13: *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Gesucht sind

(1) $\vec{a}+\vec{b}$, (2) $\vec{a}-\vec{b}$, (3) $-3\,\vec{a}$, (4) $\vec{a}\cdot\vec{b}$,
(5) *die Projektion* $\vec{a}_{\vec{b}}$ *des Vektors* $\vec{a}$ *auf den Vektor* $\vec{b}$,
(6) *die Projektion* $\vec{b}_{(2)}$ *des Vektors* $\vec{b}$ *auf die 2. Koordinatenachse und die Projektion* $\vec{b}_{(1)(3)}$ *des Vektors* $\vec{b}$ *auf die Koordinatenebene, die durch die 1. und 3. Koordinatenachse aufgespannt wird, und*
(7) *die Richtungskosinus von* $\vec{b}$.

Lösungen:

3.17: $g:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},\quad (1)\ P_3\notin g,\quad (2)\ a=3.$

3.18: $g_2:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$

3.19: $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ nicht parallel, $\overrightarrow{OP_1}+s\,\vec{a}_1=\overrightarrow{OP_2}+t\,\vec{a}_2$ nicht lösbar .

3.20: $\vec{n}=\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-8\\-8\end{pmatrix},\quad E:\ x-4y-4z-4=0,\quad h=\frac{4\sqrt{33}}{33}.$

3.21: $E:\ \frac{4}{\sqrt{42}}x-\frac{1}{\sqrt{42}}y+\frac{5}{\sqrt{42}}z-3=0$ oder $E:\ \frac{4}{\sqrt{42}}x-\frac{1}{\sqrt{42}}y+\frac{5}{\sqrt{42}}z+3=0.$

3.22: $E:\quad 2x+3y+6z-d_0=0;\qquad P_0\in E\Longrightarrow d_0=-1;$

$\Longrightarrow E:\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z+\frac{1}{7}=0$ (Hesse'sche Normalform),

$\Longrightarrow$ Abstand P_1 von $E:\ h_1=\left|\frac{2}{7}\cdot(-1)+\frac{3}{7}\cdot 0+\frac{6}{7}\cdot 2-(-\frac{1}{7})\right|=\frac{11}{7},$

$\Longrightarrow$ Abstand P_2 von $E:\ h_2=\left|\frac{2}{7}\cdot(-1)+\frac{3}{7}\cdot(-1)+\frac{6}{7}\cdot 1-(-\frac{1}{7})\right|=\frac{2}{7}.$

3.23: $E:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix},\ t,s\in\mathbb{R},\quad P_4\notin E.$

3.24: $E_0:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad t,s\in\mathbb{R}.$

3.25: $g:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$

Schnittpunkt mit E: $P_S(8;-9;10)$,

Schnittwinkel φ mit E: $\varphi=\frac{\pi}{2}-\angle(\vec{a},\vec{n}),\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$

$\angle(\vec{a},\vec{n})=\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}\right)=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\approx 1,2310$ bzw. $70,53°$.

3.26: $g:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$ nach (3.32) folgt $h=1$.

3.27: Hesse'sche Normalform von $E:\ -\frac{3}{13}x+\frac{4}{13}y-\frac{12}{13}z-2=0\Longrightarrow h_E=2,$

$\Longrightarrow$ Abstand P_0 von $E:\ h_0=\left|-\frac{3}{13}\cdot 4+\frac{4}{13}\cdot 22-\frac{12}{13}\cdot(-24)-2\right|=26,$

$g_0:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\\22\\-24\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\\-12\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$

$(P_S\in g)\wedge(P_S\in E)\Longrightarrow t_S=-2,\ P_S(10;14;0).$

3.28: Es bezeichnen P_i' die Projektion von P_i auf E und g_i die Projektionsgerade von P_i auf E, $i=1,2,3$. Dann gilt

$g_1:\ \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$

Da $P_1'\in g_1$ und $P_1'\in E$ folgt $(3+t_1)+2(5+2t_1)-(-1-t_1)=2,$

$\Longrightarrow t_1=-2;\ P_1'(1;1;1).$

Analog berechnet man $P_2'(1;-1;-3)$ und $P_3'(0;1;0)$.

$F_S=\frac{1}{2}\left|\ \overrightarrow{P_1'P_2'}\times\overrightarrow{P_1'P_3'}\ \right|=\sqrt{6},$ wobei

$\overrightarrow{P_1'P_2'}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{P_1'P_3'}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{P_1'P_2'}\times\overrightarrow{P_1'P_3'}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}.$

3.29: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene E. Es bezeichnen

$\left.\begin{array}{ll} g_0 & \text{die Schnittgerade von } E \text{ mit der } xy\text{-Ebene und} \\ g_r & \text{die Gerade, auf der die Punktmasse rutscht.} \end{array}\right\} \Longrightarrow g_r \perp g_0, \quad g_r \perp \vec{n},$

Richtungsvektor von g_0: $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Richtungsvektor von g_r: $\vec{a}_r = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot 5$ f

$g_r: \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$

$\Longrightarrow$ (für $t = 1$) Treffpunkt mit der xy-Ebene: $P(4; -4; 0)$.

3.30: $E: \; 6x - 6y - 6z + 12 = 0, \quad P_0 \in g: \; \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$

$\overrightarrow{OP_0'} = \overrightarrow{OP_0} + 2\, \overrightarrow{P_0P_E}$, wobei $P_E \in g$ und $P_E \in E$,

$\overrightarrow{OP_E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow P_0'\left(-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3.31: $R'\left(\frac{16}{7}; \frac{38}{7}; -\frac{22}{7}\right)$ ist die Spiegelung von R an der Ebene E. Die Gerade, die durch P und R' geht, durchstößt die Ebene E in $Q\left(\frac{157}{77}; \frac{190}{77}; \frac{100}{77}\right)$.

3.32: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (-3)\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ -15 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -7, \quad \vec{a}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} \\ 0 \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_{(1)(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\cos(\angle(\vec{b}; \vec{e}_1)) = \frac{2}{7}, \qquad \cos(\angle(\vec{b}; \vec{e}_2)) = \frac{5}{7}, \qquad \cos(\angle(\vec{b}; \vec{e}_3)) = 0,$

$\cos(\angle(\vec{b}; \vec{e}_4)) = \frac{2}{7}, \qquad \cos(\angle(\vec{b}; \vec{e}_5)) = -\frac{4}{7}.$