Vektoren

Aufgabe 3.1: *Die Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *seien vom Nullvektor verschieden. Unter welchen Bedingungen gilt dann*

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \ ?$$

Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?

Aufgabe 3.2: *Der Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *ist geometrisch darzustellen. Berechnen Sie den Betrag dieses Vektors.*

Aufgabe 3.3: *Gesucht sind die Koordinatendarstellung und der Betrag des Vektors* $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

Aufgabe 3.4: *Für die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

sind folgende Terme zu berechnen:

(1) $2\vec{a} + 3\vec{b}$, (2) $\vec{c} - \vec{b}$, (3) $2\vec{a} - \vec{c} + 2\vec{b}$,
(4) $\vec{c} \times \vec{b}$, (5) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$, (6) $\vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c})$.
(7) *Die Projektion* $\vec{b}_{\vec{a}}$ *des Vektors* $\vec{b}$ *auf den Vektor* $\vec{a}$.
(8) *Die Projektion* $\vec{c}_{xz}$ *des Vektors* $\vec{c}$ *auf die xz-Ebene und die Projektion* $\vec{c}_z$ *des Vektors* $\vec{c}$ *auf die z-Achse.*
(9) *Die Richtungskosinus von* $\vec{c}$.
(10) *Das Spatprodukt* $[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}]$.

Aufgabe 3.5: *Berechnen Sie den Vektor* $\vec{a}$ *vom Punkt* $P_1(1;-1;0)$ *zum Punkt* $P_2(3;1;-1)$ *und den Vektor* $\vec{b}$ *vom Punkt* $Q_1(1;0;1)$ *zum Punkt* $Q_2(3;2;0)$. *Bestimmen Sie* $|\vec{a}|$, *die Richtungskosinus von* $\vec{a}$ *und den Einheitsvektor* $\vec{a}^0$.

Aufgabe 3.6: *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ *und* $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.
(1) *Man bestimme die Vektoren* $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$.
(2) *Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.
(3) *Berechnen Sie* $|\vec{a} - \vec{b}|$. *Was bedeutet das geometrisch?*

Aufgabe 3.7: *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (1) *die Projektion von* $\vec{a}$ *auf* $\vec{b}$,
(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$ *und* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{b})$.

Aufgabe 3.8: *Von dem Vektor* $\vec{r}$ *sind seine Länge, die Projektionen* $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$, $\vec{r}_z$ *auf die Koordinatenachsen und die Projektionen* $\vec{r}_{xy}$, $\vec{r}_{xz}$, $\vec{r}_{yz}$ *auf die Koordinatenebenen zu bestimmen.*

(1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.9: *Unter welchen Bedingungen gilt* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ *?*

Aufgabe 3.10: *Es gelte* $\vec{a}\neq\vec{b}$ *und* $\vec{c}\neq\vec{0}$. *Unter welchen Bedingungen gilt dann* $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$ *?*

Aufgabe 3.11: *Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren* $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ *aufgespannt wird.*

Aufgabe 3.12: *Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck mit den Eckpunkten* $P_1(1;0;6)$, $P_2(4;5;-2)$ *und* $P_3(-2;3;4)$ *?*

Aufgabe 3.13: *Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren* $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ *und* $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ *aufgespannt wird.*

Aufgabe 3.14: *Gegeben ist die Kraft* $\vec{F}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$. *Berechnen Sie den Betrag der Kraft und die Arbeit* W *längs des geradlinigen Weges vom Punkt* $P_1(7;8)$ *zum Punkt* $P_2(4;9)$ *und interpretieren Sie das Ergebnis.*

Aufgabe 3.15: *Eine Stange ist im Punkt* $P_0(0;0;0)$ *drehbar gelagert. Im Punkt* $P_1(1;1;1)$ *greift folgende Kraft* $\vec{F}$ *an*

(1) $\vec{F}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ (2) $\vec{F}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$

Gesucht ist das Drehmoment $|\vec{M}|$ *der in* P_1 *angreifenden Kraft bezüglich* P_0.

<u>Hinweis:</u> Für den Drehmomentenvektor gilt $\vec{M}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{F}$.

Aufgabe 3.16: *Unter welchen Winkeln schneiden sich die Raumdiagonalen eines Quaders, der 1 cm lang, 1 cm breit und 2 cm hoch ist?*

Lösungen:

3.1: $\vec{a} \perp \vec{b}$, Satz des Pythagoras.

3.2: $|\vec{a}| = \sqrt{13}$.

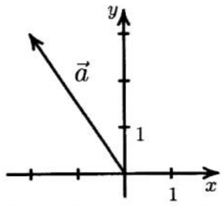

Bild: $\vec{a}$ aus Aufgabe 3.2

3.3: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = \sqrt{38}$.

3.4: (1) $2\vec{a} + 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$,

(2) $\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, (3) $2\,\vec{a} - \vec{c} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$, (4) $\vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(5) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (6) $\vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(7) $\vec{b}_a = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$, (8) $\vec{c}_{xz} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(9) $\cos\left(\angle(\vec{c}, \vec{e}_1)\right) = -\frac{1}{\sqrt{30}}$, $\cos\left(\angle(\vec{c}, \vec{e}_2)\right) = \frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\left(\angle(\vec{c}, \vec{e}_3)\right) = \frac{5}{\sqrt{30}}$,

(10) $[\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\,] = -11$.

3.5: $\vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 3$, $\vec{a}^0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

$\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{e}_1)\right) = \frac{2}{3}$, $\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{e}_2)\right) = \frac{2}{3}$, $\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{e}_3)\right) = -\frac{1}{3}$.

3.6: (1) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(2) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{65}}\right) = 1,6952$,

(3) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{20}$ ist die Länge des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$.

3.7: (1) $\vec{a}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -25 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{b}) = \vec{0}$.

3.8: (1) $|\vec{r}| = \sqrt{14}$, $\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(2) $|\vec{r}| = \sqrt{41}$, $\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$\vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_{xz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.9: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \iff \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0 \iff \left(\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})\right)\vee(\vec{a}=\vec{0})\vee(\vec{b}=\vec{c})\,.$

3.10: $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c} \iff (\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c})=\vec{0} \iff \left((\vec{a}-\vec{b})\upuparrows\vec{c}\right)\vee\left((\vec{a}-\vec{b})\uparrow\downarrow\vec{c}\right)\,.$
$\upuparrows$ steht für gleichsinnig parallel bzw. $\uparrow\downarrow$ steht für gegensinnig parallel.

3.11: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-12\\1\\-4\end{pmatrix},\quad F=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{161}\,.$

3.12: $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}14\\30\\24\end{pmatrix},\quad F=\frac{1}{2}|\,\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{1672}=\sqrt{418}\,.$

3.13: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=-33,5\,,\quad V=33,5\,.$ **3.14:** $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=-15,\quad |\vec{F}|=5\,.$

3.15: (1) $\vec{M}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\vec{0}\implies|\vec{M}|=0\,,$

(2) $\vec{M}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}\implies|\vec{M}|=\sqrt{38}\,.$

3.16: $\overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{BH}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},$

$\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$

$\angle(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BH})=\angle(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{DF})$
$=\angle(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{CE})=\angle(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DF})$
$=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\approx 0,841$ bzw. $48,19°$,
$\angle(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CE})=\angle(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{DF})$
$=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\approx 1,2310$ bzw. $70,53°$.

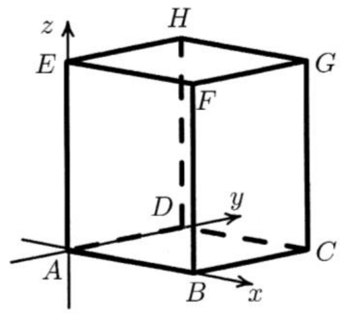

Bild: zu Aufgabe 3.16