Funktionen

Aufgabe 1.12: *Die folgenden Funktionen sind auf* $\mathbb{R}$ *definiert. Geben Sie den Wertebereich und die Schnittpunkte der Funktionen mit den Koordinatenachsen an. Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar.*

(1) $f_1(x) = |x-3| - 2|1+x| + x\,.$ (2) $f_2(x) = 2\,(1+\operatorname{sgn}(x))x^2\,.$

Aufgabe 1.13: *Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Monotonie.*

$$y = f(x) = 3|x-1| + 2|x+2|,\ x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1.14: *Die Funktion* $y = f(x) = 3|x-1| + 2|x+2|,\ x \in \mathbb{R},$ *aus der Aufgabe 1.13 ist auf Beschränktheit zu untersuchen. Geben Sie Schranken für diese Funktion an.*

Aufgabe 1.15: *Untersuchen Sie, ob die Funktionen* $k_1 = g_1 \circ g_2$ *und* $k_2 = g_2 \circ g_1$ *existieren, wobei gilt* $g_1(x) = \frac{1}{x+1},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ *und* $g_2(x) = x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 1.16: *Ermitteln Sie die inverse Funktion* f^{-1} *von der Funktion* $y = f(x) = \dfrac{1}{2x+1} - 1,\ x > -\dfrac{1}{2}.$

Aufgabe 1.17: *Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktionen, die auf dem maximal möglichen Definitionsbereich gegeben sind.*

(1) $y = f(x) = 2\sin(x) - \cos(x) + 0{,}2\,,$ (2) $y = f(x) = 3\cos(2x) - 1\,,$
(3) $y = f(x) = \sin(x) - 0{,}5\tan(x)\,,$ (4) $y = f(x) = \sin(2x) - \cos(x)\,.$

Aufgabe 1.18: *Berechnen Sie die Funktionswerte* $f(1),\ f(2),\ f(3)$ *und geben Sie die Produktdarstellung der folgenden Polynome an.*

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12$ (2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$

Aufgabe 1.19: *Geben Sie ein Polynom mit dem kleinsten Grad an, das eine einfache Nullstelle bei* $x_1 = 5,$ *eine doppelte Nullstelle bei* $x_2 = 3$ *hat und die y-Achse bei* $y = 90$ *schneidet.*
Hinweis: Verwenden Sie die Produktdarstellung des Polynoms!

Aufgabe 1.20: *Gesucht ist ein Interpolationspolynom, das durch die folgenden Punkte verläuft.*

(1) $(2;2),\ (1;1),\ (-1;0),\ (-2;0)\,,$
(2) $(-3;0),\ (-2;1),\ (-1;0),\ (0;2),\ (1;-1)\,.$

Aufgabe 1.21: *Mit Hilfe der Bilder 1.37 und 1.38 sind die hyperbolischen Funktionen auf Monotonie, Eineindeutigkeit und Beschränktheit zu untersuchen.*

Aufgabe 1.22: *Bestimmen Sie die Konstanten* a *und* b *so, dass für die Funktion* $g(x) = a\cosh(bx)$ *gilt* $g(-2) = g(2) = 5$ *und* $g(0) = 3\,.$

Lösungen:

1.12: für $f_1: W_1 = \big(-\infty;3\big];\ P_1(0;1);\ P_2(-2,5;0); P_3(0,5;0)$,
für $f_2: W_2 = \big[0;\infty\big);\ P(x;0),\ \forall x \in \big(-\infty;0\big)$.

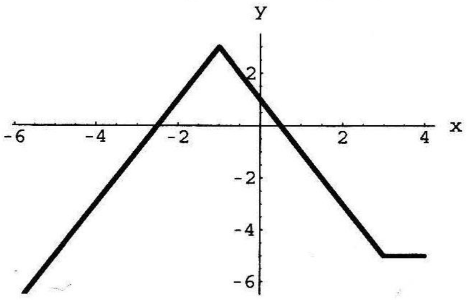

Bild: Graph von $f_1(x)$

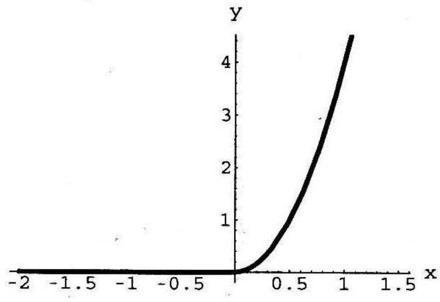

Bild: Graph von $f_2(x)$

1.13: streng monoton fallend für $x \leq 1$,
streng monoton wachsend für $x \geq 1$.

1.14: nicht beschränkt; nach unten beschränkt, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 6$.

1.15: $D_{g_1} = \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ W_{g_1} = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ D_{g_2} = \mathbb{R},\ W_{g_2} = \big[-2;\infty\big)$,
$W_{g_1} \subset D_{g_2} \Longrightarrow g_2\big(g_1(x)\big) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 - 2,\ x \neq -1$,
$W_{g_2} \not\subset D_{g_1} \Longrightarrow \nexists\, g_1 \circ g_2$.

1.16: $y = f^{-1}(x) = -\frac{x}{2(x+1)}$, $x > -1$.

1.17: (1) $L = \big\{0,3741 + 2k\pi; -2,5884 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\big\}$,
(2) $L = \big\{0,6155 + k\pi; -0,6155 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\big\}$,
(3) $L = \big\{k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\big\}$,
(4) $L = \big\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\big\}$.

1.18: (1) $f(1) = -2,\ f(2) = 0,\ f(3) = 6,\ f(x) = (x-2)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$,
(2) $f(1) = 0,\ f(2) = -4,\ f(3) = 6$,
$f(x) = (x-1)\cdot x \cdot (x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$.

1.19: $f(x) = -2(x-5)(x-3)^2,\ x \in \mathbb{R}$.

1.20: (1) $f(x) = 2 + (x-2) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1) + 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2,\ x \in \mathbb{R}$.
(2) $f(x) = 0 + 1(x+3) - 1(x+3)(x+2) + \frac{5}{6}(x+3)(x+2)(x+1)$
$-\frac{13}{24}(x+3)(x+2)(x+1)x = -\frac{13}{24}x^4 - \frac{29}{12}x^3 - \frac{47}{24}x^2 + \frac{23}{12}x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.

1.21: $\sinh(x)$: streng monoton wachsend, eineindeutig, nicht beschränkt,
$\cosh(x)$: nicht monoton, nicht eineindeutig, nach unten beschränkt,
$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \cosh(x) = 1$,
$\tanh(x)$: streng monoton wachsend, eineindeutig, beschränkt,
$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \tanh(x) = -1,\quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \tanh(x) = 1$
$\coth(x)$: nicht monoton, eineindeutig, nicht beschränkt.

1.22: $a = 3,\ b = \frac{1}{2}\mathrm{arcosh}\big(\frac{5}{3}\big) = \frac{1}{2}\ln(3) \approx 0,5493$.