Logik, Mengen

Aufgabe 1.1: *Es bezeichne* x *eine beliebige reelle Zahl. Welche Aussagen sind wahr?*

(1) $\exists\, x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = x\,.$ (2) $\forall\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = x(x+1)\,.$

(3) $\forall\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\,.$ (4) $\exists\, x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 = x^2 + 3x\,.$

Aufgabe 1.2: V *bezeichne ein Viereck. Es werden folgende Aussagen betrachtet:*

$p = \big(V \textit{ ist ein Quadrat}\big)$ $r = \big(V \textit{ hat vier rechte Winkel}\big)$

$q = \big(V \textit{ ist ein Rechteck}\big)$ $s = \big(V \textit{ hat vier gleichlange Seiten}\big)$

Welche Aussagenverbindungen sind wahr?

(1) $p \Longrightarrow q$ (2) $r \Longleftrightarrow q$ (3) $q \Longrightarrow p$

(4) $\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ (5) $\overline{r} \Longrightarrow \overline{p}$ (6) $(r \wedge s) \Longleftrightarrow p$

Aufgabe 1.3: *Es werden folgende Aussagen betrachtet:*

$p = \big(\textit{Das Produkt A wird hergestellt.}\big)$

$q = \big(\textit{Der Umsatz geht zurück.}\big)$

Stellen Sie die folgenden Aussagenverbindungen auf.

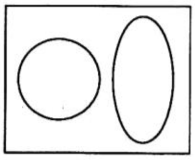
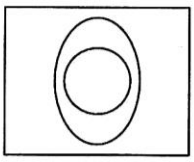
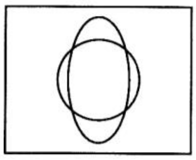
(1) *Wenn das Produkt A hergestellt wird, geht der Umsatz zurück.*

(2) *Wenn der Umsatz zurückgeht, wird das Produkt A hergestellt.*

(3) *Der Umsatz geht genau dann zurück, wenn das Produkt A hergestellt wird.*

(4) *Wenn der Umsatz zurückgeht, wird das Produkt A nicht hergestellt.*

Aufgabe 1.4: *Es bezeichnen: A die Menge aller Punkte der Kreisfläche, B die Menge aller Punkte der Ellipsenfläche und* Ω *die Menge aller Punkte des*

(1)  (2)  (3) 

Rechtecks in den Bildern (1) - (3). *Die Mengen* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ *und* $B \backslash A$ *sind jeweils mit Venn-Diagrammen darzustellen.*

Aufgabe 1.5: *Gegeben sind die Mengen* $A = \{1;2;4;6;8;9;13\}$,

$$B = \{0;2;5;7\}, \quad C = \{4;7;8;11\} \quad \textit{und} \quad D = \{4;8;9;13\}.$$

Bestimmen Sie folgende Mengen:

(1)	$A \cap B$	(2)	$C \setminus D$	(3)	$A \cap D$
(4)	$(A \setminus D) \setminus B$	(5)	$(B \cup C) \cap D$	(6)	$(A \cap C) \cup (B \cap D)$.

Aufgabe 1.6: *Gegeben sind die Intervalle*

$$A = (-1;2), \quad B = (0,5;7), \quad C = (-\infty;0] \quad \textit{und} \quad D = [-4;1].$$

Bestimmen Sie folgende Mengen und zeichnen Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden ein:

(1)	$A \cap B$	(2)	$C \setminus D$	(3)	$A \cap D$
(4)	$A \cap C$	(5)	$D \setminus C$	(6)	$A \cup D$
(7)	$(A \setminus D) \setminus B$	(8)	$(B \cup C) \cap D$	(9)	$(A \cap C) \cup (B \cap D)$.

Aufgabe 1.7: *Lösen Sie die folgenden Ungleichungen in der Menge* $\mathbb{R}$.

(1) $3(x-4) > 1 - 2(x+2)$ (2) $5(2x+4) - (3+x) \leq 2x+4$.

Aufgabe 1.8: *Für welche reellen Zahlen gelten die Ungleichungen?*

(1) $|x-1| + 2x > 1$ (2) $|3x-2| \leq 3|x+3|$

(3) $|x+2| + 2|x-3| - |x| \leq 3$ (4) $\dfrac{1}{x+3} < \dfrac{2}{x-4}$

Aufgabe 1.9: *Gesucht ist die Lösungsmenge in der Menge* $\mathbb{R}$ *der Ungleichungen*

(1) $3(x-4)^2 > (x+2)$ (2) $(2-3x)^2 - x^2 \leq x$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst anstelle der Ungleichungen Gleichungen und berechnen Sie die Lösungen dieser Gleichungen.

Aufgabe 1.10: *Für die Mengen* $A = \{0;1\}$ *und* $B = \{-1;0;2\}$ *sind die Mengen* $A \times B$, $B \times A$ *und* $A \times A \times B$ *zu ermitteln. Anschließend sind die Mengen* $B \times A$ *und* $A \times A \times B$ *graphisch darzustellen.*

Aufgabe 1.11: *Stellen Sie die folgenden Abbildungen graphisch dar. Welche Abbildungen sind eindeutig?*

(1) $A_1 = \{(x;y) \,|\, 2x + 3y \leq 6,\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}\}$.

(2) $A_2 = \{(x;y) \,|\, x^2 + y^2 = 2,25,\ x \in [-1,5;1,5]\}$.

(3) $A_3 = \{(x;y) \,|\, x + y = 1,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Lösungen:

1.1: (1) falsch , (2) wahr, (3) falsch $(x=0)$,
(4) wahr $(x=1)$.

1.2: (1) wahr, (2) wahr, (3) falsch
(4) falsch, (5) wahr, (6) wahr.

1.3: (1) $p \Longrightarrow q$, (2) $q \Longrightarrow p$, (3) $p \Longleftrightarrow q$,
(4) $q \Longrightarrow \overline{p}$.

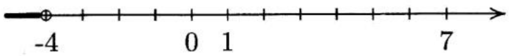
1.4:

	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
(1)		$\varnothing$		
(2)			$\varnothing$	
(3)				

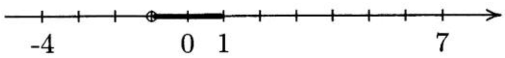
1.5: (1) $A \cap B = \{2\}$, (2) $C \setminus D = \{7;\, 11\}$,
(3) $A \cap D = D$, (4) $(A \setminus D) \setminus B = \{1;\, 6\}$,
(5) $(B \cup C) \cap D = \{4;\, 8\}$, (6) $(A \cap C) \cup (B \cap D) = \{4;\, 8\}$.

1.6: (1) $A \cap B = \big(0,5; 2\big)$

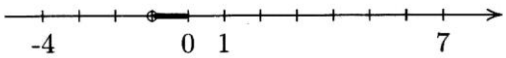
(2) $C \setminus D = \big(-\infty; -4\big)$



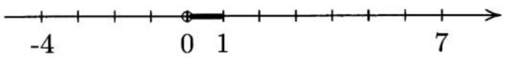
(3) $A \cap D = \big(-1; 1\big]$



(4) $A \cap C = \big(-1; 0\big]$



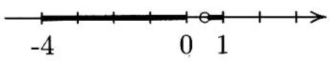
(5) $D \setminus C = \big(0; 1\big]$



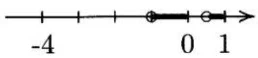
(6) $A \cup D = \big[-4; 2\big)$

(7) $\big(A \setminus D\big) \setminus B = \varnothing$

(8) $\big(B \cup C\big) \cap D = \big[-4; 0\big] \cup (0,5; 1\big]$



(9) $\big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap D\big) = \big(-1; 0\big] \cup (0,5; 1\big]$

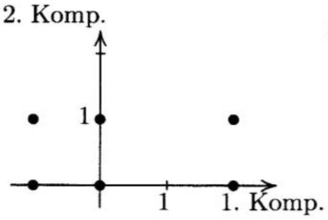


1.7: (1) $L = \big(\frac{9}{5}; \infty\big)$, (2) $L = \big(-\infty; -\frac{13}{7}\big]$.

1.8: (1) $L = \big(0; \infty\big)$, (2) $L = \big[-\frac{7}{6}; \infty\big)$, (3) $L = \big[2,5; 3,5\big]$,
(4) $L = \big(-10; -3\big) \cup \big(4; \infty\big)$.

1.9: (1) $L = \big(-\infty; \frac{25-\sqrt{73}}{6}\big) \cup \big(\frac{25+\sqrt{73}}{6}; \infty\big)$,
(2) $L = \big[\frac{13-\sqrt{41}}{16}; \frac{13+\sqrt{41}}{16}\big]$.

1.10: $A \times B = \{(0;-1);\ (0;0);\ (0;2);\ (1;-1);\ (1;0);\ (1;2)\}$,
$B \times A = \{(-1;0);\ (0;0);\ (2;0);\ (-1;1);\ (0;1);\ (2;1)\}$,
$A \times A \times B = \{(0;0;-1);\ (0;1;-1);\ (1;0;-1);\ (1;1;-1);\ (0;0;0);$
$(0;1;0);\ (1;0;0);\ (1;1;0);\ (0;0;2);\ (0;1;2);\ (1;0;2);\ (1;1;2)\}$.



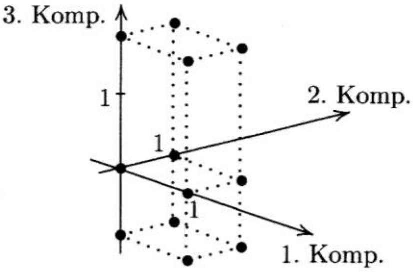
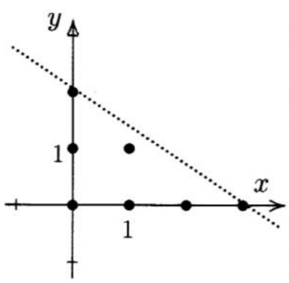
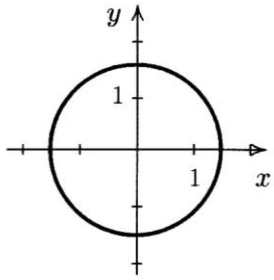
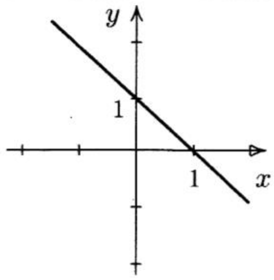


Bild: $B \times A$ (links),
$A \times A \times B$ (rechts)

1.11:

zu (1)	zu (2)	zu (3)
		
mehrdeutige Abbildung	mehrdeutige Abbildung	eindeutige Abbildung