Gottfried Wilhelm Leibniz

Historia et Origo Calculi Differentialis

1714

Gottfried Wilhelm Leibniz

Geschichte und Ursprung der Differentialrechnung

(LGM V, Kapitel 31)
Übersetzung: O. Hamborg (2007)

Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum, cujus etsi jam satis explicata habeatur constitutio, nondum tamen origo et inveniendi ratio publice habetur. Eum ante annos fere quadraginta invenit Autor, et nonum in annum pressum edidit ante annos fere triginta, ex quo celebratus est non elogiis tantum, sed et usu ipso, dum multa praeclara ejus ope inventa prostant, et praesertim in Actis Eruditorum Lipsiensibus, ac deinde in Academiae Scientiarum Regiae editis in lucem Commentariis habentur, ut novam ex eo faciem Mathesis nacta videatur. Nemo autem de vero inventore dubitavit, donec nuper anno Domini 1712 quidam novi homines, sive ignoratione rei literariae superiorum temporum, sive invidia, sive inclarescendi per lites spe, sive denique adulatione, aemulum ei quendam suscitarunt, cujus laudibus ea re non parum detractum est, nam plus habuisse videbatur, quam re hinc discussa compertum est. In eo autem fecere illi callide, quod litem movere distulerunt, donec obiere harum rerum conscii, Hugenius, Wallisius, Tschirnhusius, aliique, quorum testimonio refelli potuissent. Nempe haec est inter alias ratio, cur praescriptiones temporales jure introductae sunt, quod sive culpa sive dolo actoris possunt differri petitiones, donec adversario pereant argumenta, quibus se tueri possit. Mutarunt etiam statum controversiae, nam in eorum scripto, quod nomine *Commercii Epistolici Johannis Collinsii* 1712 edidere eo consilio, ut Leibnitio palmam dubiam

Es ist äußerst nützlich, die wahren Ursprünge bemerkenswerter Entdeckungen kennen zu lernen, vor allem derjenigen, die nicht zufällig, sondern kraft des Nachdenkens bekannt geworden sind. Dies ist nämlich nicht nur dafür hilfreich, dass die Wissenschaftsgeschichte jedem das Seine zuschreibt und andere zu gleichen Ruhmestaten aufgefordert werden, sondern dass auch die Entdeckungskunst gefördert wird, nachdem man eine Methode durch einleuchtende Beispiele kennengelernt hat. Unter den berühmteren Entdeckungen dieser Zeit befindet sich eine neue Art der mathematischen Analysis, namentlich bekannt als Differentialrechnung; auch wenn es bereits eine ausreichende Erklärung von deren Beschaffenheit gibt, ist der Ursprung und die Art und Weise des Entdeckens trotzdem noch nicht allgemein bekannt. Der Autor hat sie vor fast vierzig Jahren entdeckt und neun Jahre später, vor fast dreißig Jahren, gedruckt herausgegeben[i]. Seitdem ist sie nicht nur durch Lobreden berühmt geworden, sondern auch durch den Nutzen selbst. Unterdessen liegen mit ihrer Hilfe viele herrliche Entdeckungen vor, und sie befinden sich vor allem in den Leipziger *Acta Eruditorum* und ferner in den für die Öffentlichkeit herausgegebenen Kommentaren der Königlichen Akademie der Wissenschaften, so dass die Mathematik dadurch eine neue Gestalt erlangt zu haben scheint. Niemand hatte aber Zweifel hinsichtlich des wahren Entdeckers, bis unlängst im Jahre des Herrn 1712 einige Emporkömmlinge, sei es aus Unkenntnis der Wissenschaft früherer Zeiten oder aus Neid oder in der Hoffnung, durch Streitigkeiten bekannt zu werden, oder schließlich durch Schmeicheleien, einen gewissen Rivalen von ihm anstachelten; seiner Anerkennung ist dadurch nicht wenig Einbuße geschehen, denn er schien mehr gehabt zu haben, als in der infolgedessen erörterten Angelegenheit in Erfahrung gebracht wurde. Darin aber handelten jene listig, dass sie es verzögerten, den Streit in Gang zu bringen, bis die Mitwisser dieser Dinge gestorben waren, wie *Huygens, Wallis, Tschirnhaus* und andere, durch deren Zeugnis sie hätten widerlegt werden können. Dies ist nämlich unter anderem der Grund, weshalb Verjährungsfristen mit Recht eingeführt worden sind, weil, sei es durch Nachlässigkeit oder sei es durch List des Klägers, die Ansprüche verzögert werden können, bis die Argumente für den Gegner, mit denen er sich verteidigen kann, hinfällig werden. Sie haben sogar die Sachlage der Kontroverse geändert, denn in ihrer Schrift, die sie 1712 unter dem Titel *Commercium Epistolicum Johannis Collinsii* in der facerent, de calculo differentiali vix quicquam (invenitur): utramque paginam faciunt series, quas vocant, infinitae. Tales per divisionem inventas primus dedit publice *Nicolaus Mercator* Holsatus, sed rem generalem per extractionem reddidit *Isaacus Newtonus*. Utile est inventum, et appropinquationes Arithmeticas transfert ad calculum Analyticum, sed nihil ad calculum differentialem. Utuntur etiam hoc sophismate, ut quoties aemulus ille aliquam quadraturam indagat per additionem eorum, quibus gradatim augetur figura, statim clament usum calculo differentiali (verb.gr.pag. 15 Commercii). Sed ita calculum differentialem dudum habuissent *Keplerus* (in *Dolio Austriaco*), *Cavallerius*, *Fermatius*, *Hugenius*, *Wallisius,* et qui non illa indivisibilia vel infinite parva tractantes. At Hugenius, qui certe istas fluxionum methodos non ignorabat, quascunque isti norant aut jactant, ea aequitate fuit, ut agnosceret novam ab hoc calculo lucem Geometriae accensam et pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi, per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur, quod Vieta et *Cartesius* in *Geometria* communi seu Apolloniana fecerant, sed altiora ad Geometriam Archimedeam pertinentia et lineas, quas ideo mechanicas vocabat, Cartesius diserte a calculo suo excluserat. At vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae, ipsi Transcendentes, etiam ad aequationes locales sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum, quam x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius et ille

Absicht herausgegeben haben, Leibniz' Ruhm zweifelhaft zu machen, ist über die Differentialrechnung kaum etwas zu finden: So genannte unendliche Reihen füllen beide Seiten aus. Derartige durch Division entdeckte Reihen hat als erster der Holsteiner *Nicolaus Mercator* veröffentlicht, aber *Isaac Newton* hat die Sache durch [Wurzel-] Ziehen verallgemeinert. Die Entdeckung ist nützlich und überträgt arithmetische Annäherungen in einen analytischen Kalkül, aber nichts in die Differentialrechnung. Sie benutzen sogar diesen Trugschluss: sooft jener Rivale irgendeine Quadratur durch Addition dessen aufspürt, womit Schritt für Schritt eine Figur vergrößert wird, verkünden sie sofort laut, er habe die Differentialrechnung benutzt (z. B. Seite 15 des *Commercium*). Aber in der Weise hätten schon *Kepler* (beim *Österreichischen Weinfass*), *Cavalieri*, *Fermat*, *Huygens*, *Wallis* und diejenigen die Differentialrechnung gehabt, die nicht jene Indivisibeln oder unendlich kleinen Größen behandeln. *Huygens* dagegen, der gewiss jene Fluxionsmethoden genau kannte, welche auch immer jene kennen oder mit denen sie sich brüsten, ist so gerecht gewesen anzuerkennen, dass von diesem Kalkül ein neues Licht für die Geometrie entzündet und deren Mauern so auf wunderbare Weise vorgeschoben wurden. Und es ist tatsächlich niemandem vor Leibniz in den Sinn gekommen, einen bestimmten Algorithmus des neuen Kalküls zu begründen, durch den die Vorstellung von der ständigen Aufmerksamkeit auf Figuren befreit wurde, was *Viète* und *Descartes* in der gewöhnlichen bzw. Apollonischen Geometrie getan hatten; aber die höheren, sich auf die Archimedische Geometrie beziehenden Dinge und die Linien, die er deshalb die mechanischen nannte, hatte Descartes ausdrücklich von seinem Kalkül ausgeschlossen. Jedoch durch Leibniz' neuen Kalkül ist aber nunmehr die gesamte Geometrie, soweit sie reicht, einem analytischen Kalkül unterworfen, und jene Cartesisch-Mechanischen, für ihn transzendenten Linien, sind auch auf Ortsgleichungen zurückgeführt worden , indem man Differenzen dx, ddx u. s. w. und die zu den Differenzen reziproken Summen wie gewisse Funktionen von den x betrachtet und so in den Kalkül einführt, während vorher keine anderen Funktionen von Quantitäten verwendet worden sind als x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ u. s. w. bzw. Potenzen und Wurzeln. Daher kann man verstehen, dass die, die jene Quantitäten durch 0 ausgedrückt haben, wie *Fermat*, *Descartes* und selbst jener Rivale in seinen 16[87] herausgegebenen

Principia, noch äußerst weit von der Differentialrechnung entfernt gewesen ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata, ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vindicant, posset aliquis Cartesii analysin etiam Apollonio vindicare, qui rem calculi habebat, calculum ipsum non habebat. Unde etiam nova per calculum differentialem inventa discipulos Newtoni latuerunt, nec aliquid ipsi alicujus momenti proferre nec etiam paralogismos evitare potuerunt, donec calculum Leibnitianum didicerant, ut in Davide Gregorio Catenariam affectante compertum est. Ausi autem sunt vitilitigatores illi, abuti nomine Societatis Regiae Anglicanae, quae postea significari curavit, nihil a se hac de re decretorie pronuntiatum, quod etiam ejus aequitate dignum est, cum utraque pars audita non esset, et noster ipse ne scivisset quidem cognitionem rei aggressam Societatem: alioqui communicanda cum ipso fuissent nomina eorum, quibus relationem mandatura erat, ut vel recusari vel instrui possent. Atque ipse quidem miratus non argumentis, sed figmentis incessi fidem suam, tales responsione indignos duxit, pro certo habens coram expertibus hujus doctrinae (id est maxima lectorum parte) frustra litigari, intelligentes autem re discussa iniquitatem imputationum facile agnituros. Accedebat quod erat absens domo, cum ista ab adversariis sparsa sunt, et redux post biennii intervallum, distractusque negotiis non reperire et consulere potuit reliquias antiqui sui commercii literarii, unde ipse se de rebus tam longinquis, id est ante plus quam quadraginta annos gestis instruere posset; nam literarum plerarumque a se olim scriptarum apographa non servarat, et quas Wallisius in Anglia inventas ipso consentiente in Tomo Operum tertio edidit, ipse plerasque non habebat.

sind, weil so weder die Grade der Differenzen noch die differentialen Funktionen von verschiedenen Quantitäten unterschieden werden können. Davon, dass irgendjemand vor Leibniz Derartiges zu tun pflegte, gibt es nirgendwo auch nur die geringste Spur. Und mit dem Recht, mit welchem jetzt die Gegner Derartiges für Newton in Anspruch nehmen, könnte jemand die Analysis des Descartes sogar für Apollonios in Anspruch nehmen, der den Sachverhalt des Kalküls hatte, den Kalkül selbst nicht hatte. Daher sind auch die mittels der Differentialrechnung gemachten neuen Entdeckungen den Schülern Newtons verborgen geblieben, und jene haben weder irgendetwas von irgendeiner Bedeutung hervorbringen noch sogar Trugschlüsse vermeiden können, bis sie den Leibnizschen Kalkül gelernt hatten, wie man es bei *David Gregory* erfahren hat, der sich mit dem Kettenproblem befasste. Aber jene Ränkeschmiede haben es gewagt, den Namen der englischen *Royal Society* zu missbrauchen, die später dafür sorgte bekannt zu machen, dass nichts in dieser Angelegenheit von ihr endgültig entschieden worden war, – was auch ihrer Gerechtigkeit würdig ist –, weil nicht jede der beiden Parteien gehört worden war, und selbst unser [Mann] nicht einmal gewusst hatte, dass die Society eine Untersuchung der Angelegenheit begonnen hatte; anderenfalls hätten ihm die Namen derer mitgeteilt werden müssen, denen sie den Bericht übergeben wollte, sodass sie entweder zurückgewiesen oder unterrichtet werden konnten. Und er selbst wunderte sich nicht über die Argumente, sondern über die Erdichtungen, um seine Glaubwürdigkeit anzugreifen, und hielt derartige Leute einer Erwiderung für unwürdig, wobei er es für sicher hielt, dass in Gegenwart der in dieser Lehre Unkundigen (d. h. des größten Teils der Leser) umsonst gestritten wird, dass aber die Verständigen, wenn die Angelegenheit erörtert ist, das Unrecht der Vorwürfe leicht erkennen werden. Hinzu kam, dass er von Zuhause abwesend war, während jene Dinge von den Gegnern verbreitet wurden, und nach einem Zeitraum von zwei Jahren zurückkommend und durch Pflichten abgehalten, konnte er die Reste seines alten Schriftverkehrs nicht finden und zu Rate ziehen, von wo her er sich selbst über die so weit entfernten Sachen, d. h. die vor mehr als vierzig Jahren betriebenen, hätte unterrichten können; denn er hatte die Abschriften der meisten von ihm vor Zeiten geschriebenen Briefe nicht aufbewahrt; auch hatte er selbst die meisten nicht, die in England gefunden wurden und die mit seiner Zustimmung Wallis im dritten Band der Opera herausgegeben hat. Es fehlten trotzdem nicht die Freunde, die sich um

Non defuere tamen amici, quibus fama ejus curae esset, et quidem *Matematicus nostri temporis primarius, in hac doctrina profundissimus, et neutri addictus*), cujus benevolentiam pars adversa per artes frustra captaverat, candide pronuntiavit rationibus judicii sui adjectis, et publice sciri non aeque tulit, sibi videri aemulum illum non tantum non invenisse Calculum differentialem, sed etiam ne satis quidem intellexisse. Alius etiam amicus inventoris haec aliaque brevi scheda in lucem misit, ut vanae jactationes retunderentur. Sed majus operae pretium erat ipsam viam ac rationem, qua ad novum hoc calculi genus inventor pervenit, innotescere; ea enim hactenus publice ignoratur etiam illis ipsis fortasse, qui in partem inventi venire vellent, quam exponere ipse et progressus studiorum suorum Analyticorum partim ex memoria partim ex scriptis extantibus et veterum schedarum qualibuscunque reliquiis tradere, eaque ratione Historam profundioris Matheseos artemque ipsam inveniendi justo libello illustrare decreverat. Sed cum id nunc per necessarias occupationes fieri non posset, permisit ut hoc compendium partis dicendorum per amicum conscium in lucem interim daretur et publicae curiositati nonnihil satisfieret.

Autor hujus novae Analyseos in primo aetatis flore studiis historiarum et jurisprudentiae innato quodam genio meditationes profundiores adjunxerat, et inter alia numerorum proprietatibus combinationibusque delectabatur et de Arte etiam Conbinatoria A. D. 1666 libellum ediderat, postea ipso inconsulto recusum. Et puer adhuc logicam versans animadverterat ultimam veritatum a ratione pendentium analysin abire in haec duo: definitiones, et veritates identicas, solas necessariarum vere primitivas indemonstrabilesque; et cum objiceretur ipsi, veritates identicas inutiles et nugatorias esse, ipse contrarium

seinen guten Ruf kümmerten, und gerade ein erstrangiger Mathematiker unserer Zeit, in dieser Lehre äußerst gründlich und keiner der beiden Seiten verpflichtet, dessen Wohlwollen die gegnerische Seite durch Kunstgriffe vergeblich zu gewinnen gesucht hatte, äußerte sich jedenfalls klar unter Hinzufügung der Gründe seines Urteils und sorgte eifrig dafür, dass man dies auch öffentlich wusste, ihm scheine, jener Rivale habe nicht nur die Differentialrechnung nicht entdeckt, sondern auch nicht einmal ausreichend verstanden.. Auch ein anderer Freund des Entdeckers brachte dieses und anderes auf einem kleinen Blatt Papier an die Öffentlichkeit, damit die eitlen Prahlereien gedämpft würden. Aber es war einer größeren Mühe wert, dass der Weg selbst und die Art, wie der Entdecker zu dieser neuen Rechenmethode gelangt ist, bekannt wird; dieser ist bis jetzt nämlich öffentlich nicht bekannt, sogar selbst jenen vielleicht, die Anteil an der Entdeckung bekommen wollten. Diesen selbst darzulegen, hatte er beschlossen, und die Fortschritte seiner analytischen Studien mitzuteilen, teils aus dem Gedächtnis, teils aufgrund der vorhandenen Schriften und der wie auch immer beschaffenen Reste an alten Blättern, und auf diese Weise die Geschichte der tiefergehenden Mathematik und die Kunst eben des Entdeckens in einem angemessenen kleinen Buch zu erläutern. Weil das aber jetzt wegen dringender Geschäfte nicht geschehen konnte, hat er es zugelassen, dass diese Zusammenfassung des Teils des Erwähnenswerten durch einen mit der Sache vertrauten Freund inzwischen an die Öffentlichkeit gebracht und der öffentlichen Neugierde etwas Genüge getan wurde.

Der Urheber dieser neuen Analysis hatte in der ersten Blüte des Lebens an die Studien der Historien und Jurisprudenz, einer gewissen angeborenen Neigung entsprechend, tiefergehende Überlegungen geknüpft, und er erfreute sich unter anderem an den Eigenschaften von Zahlen und Kombinationen, und hatte auch über die kombinatorische Kunst ein kleines Buch im Jahre des Herrn 1666 herausgegeben, das später ohne sein Wissen nachgedruckt wurde. Als Knabe und noch bei der Beschäftigung mit der Logik hatte er wahrgenommen, dass die letzte Analyse der von einer Begründung abhängigen Wahrheiten auf folgende zwei Dinge hinausläuft: Definitionen und identische Wahrheiten; allein sie sind von den notwendigen die wahrhaft erstrangigen und unbeweisbaren; und als man ihm vorwarf, die identischen Wahrheiten seien nutzlos und wertlos, legte er mit Experimenten sogar das etiam experimentis ostendebat, atque inter alia jam tum monstrabat Axioma illud magnum, Totum esse majus parte, demonstrari per syllogismum, cujus major propositio esset definitio, minor esset propositio identica. Nam si duorum unum sit aequale parti alterius, illud *minus*, hoc *majus* appellari, quae sit definitio. Unde, si definitioni isti axioma hoc identicum atque indemonstrabile adjungatur, quod omne magnitudine praeditum sibi ipsi aequale est, seu A = A, syllogismus talis nascatur: Quidquid parti alterius aequale est, id altero minus est (per definitionem); Pars parti totius aequalis est (nempe sibi ipsi, per veritatem identicam); ergo pars toto minor est. Q.E.D. Inde pergens observabat ex hoc A = A vel A – A = 0 utique identico et ut prima fronte videri possit prorsus spernendo, oriri pulcherrimam quandam differentiarum proprietatem, nam

$$A - \underbrace{A + B}_{+L} - \underbrace{B + C}_{+M} - \underbrace{C + D}_{+N} - \underbrace{D + E}_{+P} - E \ \text{ esse} = 0$$

Si jam ponantur A, B, C, D, E esse quantitates crescentes, et differentiae earum proximae B – A, C – B, D – C, E – D vocentur L, M, N, P, hinc fieri

$$\begin{array}{rl} & A + L + M + N + P - E = 0 \\ \text{vel} & L + M + N + P = E - A \end{array}$$

id est, summam differentiarum proximarum quotcunque aequari differentiae inter terminos extremos. Exempli causa loco A, B, C, D, E, F sumantur numeri quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, loco diffrentiarum prodibunt numeri impares 1, 3, 5, 7, 9,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \end{array}$$

ubi patet fore 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 – 0 = 25 et 3 + 5 + 7 + 9 = 25 – 1 = 24, idemque locum habere, quantuscunque sit numerus terminorum

Gegenteil dar, und zeigte unter anderem schon damals, dass jenes große Axiom, dass das Ganze größer als der Teil ist, durch einen Syllogismus bewiesen wird, dessen Obersatz eine Definition wäre, dessen Untersatz eine identische Wahrheit wäre. Wenn nämlich von zwei Dingen das eine gleich einem Teil des anderen ist, wird jenes kleiner, dieses größer genannt; das ist die Definition. Daher, wenn zu jener Definition eben dieses identische und unbeweisbare Axiom hinzugefügt wird, dass jedes mit Größe versehene Etwas sich selbst gleich bzw. A = A ist, entsteht wohl ein derartiger Syllogismus: Alles, was einem Teil eines anderen gleich ist, ist kleiner als das andere (nach der Definition). Der Teil ist gleich einem Teil des Ganzen (nämlich sich selbst, nach der identischen Wahrheit); also ist der Teil kleiner als das Ganze. Das war zu beweisen. Von dort aus weitergehend beobachtete er, dass aus diesem jedenfalls identischen und, wie es beim ersten Anblick erscheinen kann, geradezu verachtenswerten A = A oder A - A = 0 eine gewisse äußerst schöne Eigenschaft von Differenzen entsteht, dass nämlich

$$A - \underbrace{A + B}_{+L} - \underbrace{B + C}_{+M} - \underbrace{C + D}_{+N} - \underbrace{D + E}_{+P} - E = 0 \ \text{ ist.}$$

Wenn man nun voraussetzt, dass A, B, C, D, E wachsende Quantitäten sind, und ihre benachbarten Differenzen B - A, C - B, D - C, E - D L, M, N, P genannt werden, entsteht daher

$$\begin{array}{rl} & A + L + M + N + P - E = 0 \\ \text{oder} & L + M + N + P = E - A\,, \end{array}$$

d. h., die Summe beliebig vieler benachbarter Differenzen ist gleich der Differenz zwischen den äußersten Termen. Zum Beispiel mögen an Stelle von A, B, C, D, E, F die Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25 genommen werden, an Stelle der Differenzen werden die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 herauskommen

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9\,, & \end{array}$$

daher ist klar, dass 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 – 0 = 25 und 3 + 5 + 7 + 9 = 25 – 1 = 24 sein wird, und dass gilt, wie groß auch immer die Anzahl der Terme oder Differenzen ist, und welche äußersten Terme auch immer angenommen differentiarumve et quicunque assumantur termini extremi. Atque hac tam facili jucundaque observatione delectatus noster adolescens varias numericas series tentabat, ac progrediebatur etiam ad differentias secundas seu differentias differentiarum, et ad differentias tertias seu differentias inter differentias differentiarum, atque ita porro. Atque ita observabat, evanescere differentias secundas numerorum naturalium seu ordine sumtorum inde a 0, evanescere tertias ab ipsis quadratorum, quartas cuborum, quintas biquadratorum, sextas surdesolidorum, et ita porro; et constantem esse differentiam primam naturalium 1, secundam quadratorum $1 \cdot 2 = 2$, tertiam cuborum $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, quartam biquadratorum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, quintam surdesolidorum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, et ita porro; quae aliis licet dudum observata, ipsi nova erant et facili jucunditate sua invitantia ad progressus. Sed combinatorios quos vocabat numeros inprimis meditabatur, quorum nota est haec Tabula, ubi praecedens series horizontalis vel verticalis semper continet differentias primas seriei sequentis primae, secundas seriei sequentis, et tertias tertiae etc., et quaevis series horizontalis vel verticalis continet summas seriei praecedentis primae, summas summarum seu summas secundas seriei praecedentis secundae, tertias tertiae. Sed etiam ut addamus aliquod nondum fortasse vulgare, generalia quaedam de differentiis et summis theoremata eruebat, qualia sunt sequentia. Serie a, b, c, d, e etc. decrescente in infinitum, sunt

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

Termini		a	b	c	d	e	etc.
differentia	1mae	f	g	h	i	k	etc.
	2dae	l	m	n	o	p	etc.
	3tiae	q	r	s	t	u	etc.
	4tae	β	γ	δ	ε	ϑ	etc.
	etc.	λ	μ	ν	ο	σ	etc.

werden. Und vergnügt durch diese so leichte und erfreuliche Beobachtung, untersuchte unser junger Mann verschiedene Zahlenreihen und schritt auch zu den zweiten Differenzen bzw. den Differenzen von Differenzen und zu dritten Differenzen bzw. den Differenzen zwischen Differenzen von Differenzen, und so weiter voran. Und so beobachtete er, dass die zweiten Differenzen der natürlichen bzw. der von 0 an der Reihe nach genommenen Zahlen verschwinden, dass die dritten der Quadrate von ihnen verschwinden, die vierten der Kuben, die fünften der Biquadrate, die sechsten der fünften Potenzen und so weiter; und dass von den natür-lichen Zahlen die erste Differenz konstant 1 ist, von den Quadratzahlen die zweite $1 \cdot 2 = 2$, von den Kubikzahlen die dritte $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, von den Biquadraten die vierte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, von den fünften Potenzen die fünfte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ und so weiter. Wenn auch diese Dinge von anderen längst beobachtet wurden, waren sie ihm selbst neu und durch ihre mühelose Annehmlichkeit einladend zum Vorwärtsschreiten. Aber vor allem dachte er über die so genannten kombinatorischen Zahlen nach, von denen diejenige Tabelle bekannt ist, wo die vorhergehende horizontale oder vertikale Reihe immer die ersten Differenzen der ersten folgenden Reihe enthält, die zweiten der folgenden Reihe und die dritten der dritten etc., und jede beliebige horizontale und vertikale Reihe die Summen der ersten vorhergehenden Reihe, die Summen der Summen bzw. die zweiten Summen der zweiten vorhergehenden Reihe, die dritten der dritten enthält. Aber damit wir auch etwas vielleicht noch nicht überall Bekanntes hinzufügen, machte er einige allgemeine Theoreme über Differenzen und Summen ausfindig, wie die Folgenden. Bei einer ins Unendliche abnehmenden Reihe a, b, c, d, e etc. sind

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

die Terme		a	b	c	d	e	etc.
die Differenzen	1.	f	g	h	i	k	etc.
	2.	l	m	n	o	p	etc.
	3.	q	r	s	t	u	etc.
	4.	β	γ	δ	ε	ϑ	etc.
	etc.	λ	μ	ν	ρ	σ	etc.

Wenn als erster Term a, als letzter ω gesetzt ist, entdeckte er posito Termino primo a, ultimo ω, inveniebat

$$\begin{array}{lllllllllllll}
a-\omega & = & 1f & + & 1g & + & 1h & + & 1i & + & 1k & + & etc. \\
a-\omega & = & 1l & + & 2m & + & 3n & + & 4o & + & 5p & + & etc. \\
a-\omega & = & 1q & + & 3r & + & 6s & + & 10t & + & 15u & + & etc. \\
a-\omega & = & 1\beta & + & 4\gamma & + & 10\delta & + & 20\varepsilon & + & 35\vartheta & + & etc. \\
etc. & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

et rursus

$$a-\omega=\left\{\begin{array}{lllll}
+1f & & & & \\
 & -1l & & & \\
+1f & & +1q & & \\
 & -2l & & -1\beta & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda \\
 & -3l & & -4\beta & \\
+1f & & +6q & & etc. \\
 & -4l & & etc. & \\
+1f & & etc. & & \\
 & etc. & & & \\
etc. & & & &
\end{array}\right.$$

Unde loquendo stylo a se postea introducto et terminum seriei vocando y (quo casu etiam est a = y), licebit differentiam primam vocare dy, secundum ddy, tertiam d^3y, quartam d^4y; et terminum alterius seriei vocando x, licebit summam horum vocare $\int x$, et summam summarum seu summam secundam $\iint x$, et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$.
Hinc posito 1 + 1 + 1 + 1 + etc. esse = x, seu x esse numeros naturales, quorum dx = 1, tunc

$$\begin{array}{lllllllllllll}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & etc. & fit = & \int x \\
et & 1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & + & & etc. & fit = & \iint x \\
et & 1 & + & 4 & + & 10 & + & 20 & + & & etc. & fit = & \int^3 x \\
et & 1 & + & 5 & + & 15 & + & 35 & + & & etc. & = & \int^4 x
\end{array}$$

et ita porro. Unde tandem fit: $y - \omega = dy \cdot x - ddy \cdot \int x + d^3y \cdot \iint x - d^4y \cdot \int^3 x +$ etc. quod est = y, posito continuari in infinitum seu fieri ω = 0. Unde etiam sequitur summatio ipsius seriei, seu fit:

$$\int y = yx - dy \cdot \int x + ddy \cdot \iint x - d^3y \cdot \int^3 x + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{lllllllllllll}
a-\omega & = & 1f & + & 1g & + & 1h & + & 1i & + & 1k & + & etc. \\
a-\omega & = & 1l & + & 2m & + & 3n & + & 4o & + & 5p & + & etc. \\
a-\omega & = & 1q & + & 3r & + & 6s & + & 10t & + & 15u & + & etc. \\
a-\omega & = & 1\beta & + & 4\gamma & + & 10\delta & + & 20\varepsilon & + & 35\vartheta & + & etc. \\
etc. & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

und wiederum

$$a-\omega=\left\{\begin{array}{lllll}
+1f & & & & \\
 & -1l & & & \\
+1f & & +1q & & \\
 & -2l & & -1\beta & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda \\
 & -3l & & -4\beta & \\
+1f & & +6q & & etc. \\
 & -4l & & etc. & \\
+1f & & etc. & & \\
 & etc. & & & \\
etc. & & & &
\end{array}\right.$$

Wenn man daher in dem von ihm später eingeführten Stil redet und einen Term der Reihe y nennt (in diesem Fall ist auch a = y), wird man die erste Differenz dy nennen dürfen, die zweite ddy, die dritte d^3y, die vierte d^4y; und wenn man einen Term der anderen Reihe x nennt, wird man deren Summe $\int x$ nennen dürfen, und die Summe der Summen bzw. die zweite Summe $\iint x$, und die dritte Summe $\int^3 x$, und die vierte Summe $\int^4 x$.
Ist daher vorausgesetzt, dass 1 + 1 + 1 + 1 + etc. = x ist, bzw. dass x die natürlichen Zahlen sind, deren dx = 1 ist, dann wird

$$\begin{array}{llllllllllll}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & etc. = & \int x \\
und & 1 & + & 3 & + & 6 & + & 10 & + & & etc. = & \iint x \\
und & 1 & + & 4 & + & 10 & + & 20 & + & & etc. = & \int^3 x \\
und & 1 & + & 5 & + & 15 & + & 35 & + & & etc. = & \int^4 x
\end{array}$$

und so weiter werden. Daher entsteht schließlich $y - \omega = dy \cdot x - ddy \cdot \int x + d^3y \cdot \iint x - d^4y \cdot \int^3 x +$ etc., d. h. = y, vorausgesetzt, dass man bis ins Unendliche fortfährt, bzw. ω = 0 wird. Daraus folgt auch die Summation der Reihe selbst, bzw. es entsteht

$$\int y = yx - dy \cdot \int x + ddy \cdot \iint x - d^3y \cdot \int^3 x + \text{etc.}$$

Quae bina theoremata id habent egregium, ut aeque locum habeant in utroque Calculo differentiali, tam Numerico, quam Infinitesimali, de quorum discrimine infra dicemus.

Numericarum autem veritatum ad Geometriam applicatio, et consideratio etiam serierum infinitarum nostro tunc adolescenti prorsus ignota erat, satisque habebat talia in numerorum seriebus cum voluptate observasse. Nec praeter vulgatissima praecepta practica ipse tunc quicquam de Geometria tenebat, et Euclidem vix satis attente adspexerat, aliis plane studiis intentus. Forte tamen incidit in *Vincentii Leotaudi Amoeniorem Curvilineorum Contemplationem*, ubi autor ille varias tractabat Lunularum Quadraturas, et in *Cavallerii Geometriam Indivisibilium*, quibus nonnihil inspectis facilitate methodorum delectabatur, sed nullo tunc animo in Mathematica illa profundiora se immergendi, tametsi Physicis et Mechanices practicae studiis subinde operam daret, ut ex edito *Hypotheseos physicae* opusculo intelligi potest. Erat tunc ascitus in Revisionum Consilium Eminentissimi Electoris Moguntini, et a gratiosissimo judiciosissimoque Principe (qui transiturum et longius iturum juvenem sibi vindicaverat) permissione continuandae peregrinationis impetrata, Lutetiam Parisiorum A.D. 1672 profectus erat. Ibi in Summi Viri, *Christiani Hugenii*, notitiam venit, cujus exemplo et consiliis se debere semper professus est aditum ad altiorem Mathesin. Is tunc forte suum *de Pendulis* opus edebat. Cujus cum exemplum juveni dono attulisset et inter colloquendum animadvertisset, Centri gravitatis naturam huic non satis cognitam, quid hoc rei esset, et quomodo indagari posset, paucis exposuit. Id nostrum a veterno excitavit, talia a se ignorari indignum putantem. Sed tunc quidem vacare his studiis non potuit, et mox sub exitum anni in Angliam transfretavit in comitatu Legati Moguntini, ibique paucis septimanis cum Legato haesit et ab Henrico quidem Oldenburgio, Societatis

Diese zwei Theoreme haben das Besondere, dass sie in gleicher Weise bei beiden Differentialrechnungen gelten, bei der numerischen ebenso wie bei der infinitesimalen, über deren Unterschied wir unten reden werden.

Die Anwendung numerischer Wahrheiten aber auf die Geometrie und die Betrachtung sogar unendlicher Reihen war unserem damals jungen Mann völlig unbekannt, und er war zufrieden, derartiges bei Zahlenreihen mit Vergnügen beobachtet zu haben. Auch wusste er damals außer den gewöhnlichsten praktischen Lehren nichts über die Geometrie, und Euklid hatte er sich kaum aufmerksam genug angeschaut, da er sich völlig anderen Studien zuwandte. Zufällig stieß er dennoch auf *Vincent Leotauds Reizvollere Betrachtung krummliniger Dinge*, wo jener Autor verschiedene Quadraturen der Möndchen behandelte, und auf *Cavalieris Geometrie der Indivisibeln*. Nachdem er dieses etwas gelesen hatte, erfreute er sich an der Leichtigkeit der Methoden, aber damals ohne einen Gedanken daran, sich in jene tiefergehenden mathematischen Dinge zu versenken, auch wenn er sich immer wieder um physikalische Studien und solche der praktischen Mechanik bemühte, wie man es aus der herausgegebenen kleinen Schrift *Physikalische Hypothese* erkennen kann. Damals wurde er in das *Revisionum Consilium* des Erlauchtesten Mainzer Kurfürsten aufgenommen, und mit der vom gnädigsten und gerechtesten Fürsten (der den jungen Mann in seinen Dienst gestellt hatte, als er auf einer Vorbeireise im Begriff war, weiterzufahren) erbetenen Erlaubnis für eine anschließende Auslandsreise brach er im Jahre des Herrn 1672 nach Paris auf. Dort wurde er mit dem überragenden Mann, Christiaan Huygens bekannt, dessen Beispiel und Ratschlägen er, wie er öffentlich immer erklärte, den Zugang zur höheren Mathematik verdankt. Zufällig gab dieser damals sein Werk über die Pendel heraus. Als er ein Exemplar davon dem jungen Mann als Geschenk überreicht und während einer Unterhaltung bemerkt hatte, dass diesem die Natur des Schwerpunkts nicht ausreichend bekannt war, legte er mit wenigen Worten dar, was für eine Sache das wäre und wie sie erforscht werden könnte. Dieses trieb unseren [Mann] aus der Untätigkeit, weil er es für unwürdig hielt, derartige Dinge nicht zu kennen. Aber damals eben konnte er sich diesen Studien nicht widmen und sogleich gegen Jahresende fuhr er im Gefolge des Mainzer Gesandten über das Meer nach England und verweilte dort mit dem Gesandten wenige Wochen. Auch wurde er von eben *Heinrich Oldenburg*, Regiae Secretario tunc, in illustre Collegium introductus est, cum nemine autem de Geometria contulit (in qua ipse tunc erat plane proletarius), sed cum chymiam non negligeret, aliquoties illustrem virum *Robertum Boylium* adiit, et cum ibi forte in *Pellium* incidisset et suas quasdam observationes numericas ei narrasset, dixit Pellius haec non esse nova et nuper *Nicolaum Mercatorem* in sua Hyperbolae Quadratura publice monstrasse, diffferentias potentiarum Numericarum continuatas tandem evanescere. Ea occasio nostro fuit quaerendi libellum Nicolai Mercatoris. *Collinsium* tunc non novit, com Oldenburgio tantum de rebus literariis, Physicis et Mechanicis collocutus est, de Geometria autem profundiore atque adeo de seriebus illis Newtoni ne verbulum quidem commutavit, et plane in istis hospitem se fuisse nec nisi in numerorum proprietatibus et quidem mediocriter admodum versatum satis ostendit ipsis literis cum Oldenburgio commutatis, quae nuper sunt ab adversariis productae, idemque ex illis haud dubie patebit, quas adhuc in Anglia asservari scribunt, sed suppresserunt, credo forte quod ex ipsis satis appareret, nullum adhuc de rebus Geometricis ei cum Oldenburgio commercium fuisse, cum ipsi tamen credi velint (ne minimo quidem adducto indicio) jam tum ei ab Oldenburgio communicata fuisse, quaecunque inter Collinsium, Gregorium, Newtonum acta is habebat.

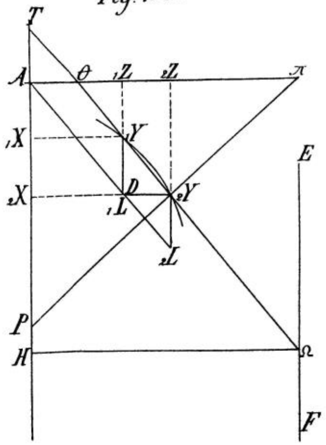
Sed reversus ex Anglia in Galliam A. D. 1673, fatis interim functo Eminentissimo Electore Moguntino, cujus gratia Moguntiae obhaeserat, jam liberior hortante Hugenio coepit tractare Analysin Cartesii (antea vix eminus salutatam), et ut in Geometriam Quadraturarum introduceretur, *Honorati Fabri Synopsin Geometricam*, *Gregorium a S. Vincentio*, et *Dettonvillaei* (id est *Pascalii*) libellum consuluit. Porro ex uno quodam exemplo Dettonvillaei lux ei subito oborta est, quam ipse Pascalius (quod mireris) inde non hauserat.

dem damaligen Sekretär der *Royal Society*, in das berühmte Kollegium eingeführt, aber mit niemandem verhandelte er über die Geometrie (in der er damals selbst gewiss ein Proletarier war); aber da er nicht die Chemie vernachlässigte, besuchte er mehrmals den berühmten Herrn *Robert Boyle*, und als er dort zufällig auf *Pell* gestoßen war und ihm von einigen seiner numerischen Beobachtungen erzählt hatte, sagte Pell, dass diese Dinge nicht neu seien, und dass unlängst *Nikolaus Mercator* in seiner Quadratur der Hyperbel öffentlich gezeigt hat, dass die fortgesetzten Differenzen von Zahlenpotenzen schließlich verschwinden. Das war für unseren [Mann] der Anlass nach dem kleinen Buch von Nikolaus Mercator zu fragen. *Collins* kannte er damals nicht; mit Oldenburg unterhielt er sich nur über literarische, physikalische und mechanische Dinge, aber über die tiefergehende Geometrie und besonders über jene Reihen von Newton wechselte er nicht einmal ein Wörtchen. Dass er auf diesen Gebieten durchaus ein Fremder gewesen ist und lediglich in den Eigenschaften von Zahlen – und zwar äußerst mittelmäßig – bewandert, zeigt sich zur Genüge anhand der mit Oldenburg ausgetauschten Briefe eben, die unlängst von den Gegnern veröffentlicht worden sind; und dasselbe wird zweifellos aus jenen klar, die, wie sie schreiben, in England aufbewahrt werden, die sie aber unterdrückt haben, ich glaube, vielleicht, weil aus ihnen ausreichend ersichtlich würde, dass er bis dahin keinen Briefwechsel mit Oldenburg über geometrische Angelegenheiten gehabt hat, weil sie selbst wollen, dass trotzdem geglaubt wird (wofür nicht einmal das geringste Anzeichen erbracht wurde), dass ihm schon damals von Oldenburg alles mitgeteilt wurde, was dieser hatte und was zwischen Collins, Gregory und Newton abgehandelt worden war.

Zurückgekehrt aus England nach Frankreich im Jahre des Herrn 1673, als inzwischen der Erlauchteste Mainzer Kurfürst, um dessentwillen er in Mainz verblieben war, eines natürlichen Todes gestorben war, begann er, nunmehr freier, mit Huygens' Ermutigung die (vorher kaum von fern begrüßte) Analysis des *Descartes* zu überdenken; und um in die Geometrie der Quadraturen eingeführt zu werden, zog er die *Synopsis Geometrica* des *Honoré Fabri*, den *Grégoire de Saint Vincent* und das kleine Buch des *Dettonville* (d. h. des *Pascal*) zu Rate. Nun aber ging ihm von einem einzigen gewissen Beispiel des *Dettonville* her plötzlich ein Licht auf, das selbst Pascal (was verwundern mag) von dort her nicht erblickt hatte. Während nämlich

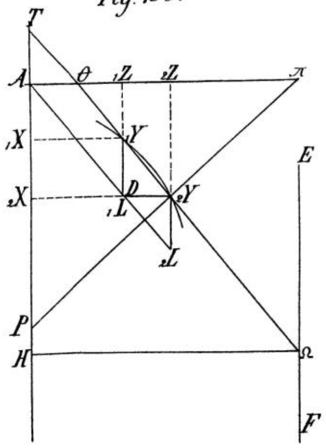
Nam dum ille demonstrat Theorema Archimedeum de superficie sphaerae aut ejus partium mensuranda, utitur methodo, qua omnis solidi rotatione circa axem aliquem descripti superficies ad proportionalem figuram planam revocari potest. Tale enim inde noster sibi paravit theorema generale: Rectae perpendicularis ad curvam portiones interceptae inter axem et curvam, ordinatim et normaliter applicatae ad axem, dant figuram momento curvae ex axe proortionalem. Id cum monstrasset Hugenio, valde is probavit, fassusque est, hujus ipsius theorematis ope se superficiem Conoidis Parabolici, aliarumque hujusmodi superficierum in opere *de Horologio oscillatorio* sine demonstratione positarum, ante multos annos reperisse. His noster excitatus, animadversa foecunditate harum meditationum, cum prius infinite parva tantum ut intervalla ordinatarum Cavalleriano more considerasset, commentus est Triangulum quod vocavit characteristicum $_1Y\ D\ _2Y$ (fig. 155), cujus latera $D\ _1Y$, $D\ _2Y$ aequalia $_1X\ _2X$, $_1Z\ _2Z$ essent portiones coordinatarum seu coabscissarum AX, AZ, et tertium latus $_1Y\ _2Y$ esset portio tangentis $T\Omega$, si opus productae. Et huic Triangulo, licet inassignabili (seu infinite parvo), videbat semper posse Triangula similia assignabilia. Sunto enim AXX, AZZ condirigentes normales; cobscissae AX, AZ; coordinatae YX, YZ; tangens $T\Theta Y$; perpendicularis $PY\Pi$; subtangentiales XT, $Z\Theta$; subnormales XP, $Z\Pi$; denique ducatur EF parallela axi AX, eique tangens TY occurrat in Ω, unde ad axem agatur normalis ΩH; fient triangula similia $_1Y\ D\ _2Y$, TXY, $YZ\Theta$, $TA\Theta$, YXP, ΠZY, ΠAP, $TA\Omega$, aliaque hujusmodi plura si lubet. Hinc

Fig. 155.



jener das archimedische Theorem über die zu messende Oberfläche einer Kugel oder der Teile von ihr beweist, benutzt er eine Methode, mit der jede Oberfläche eines durch Drehung um irgendeine Achse beschriebenen Körpers auf eine proportionale ebene Figur zurückgeführt werden kann. Von dort nämlich verschaffte sich unser [Mann] das folgende allgemeine Theorem: Die Teile der zur Kurve hin normalen Geraden, die zwischen einer Achse und der Kurve liegen und der Reihe nach und senkrecht an die Achse angelegt sind, ergeben eine Figur, die proportional zum Kurvenmoment von der Achse aus ist. Als er das *Huygens* gezeigt hatte, stimmte dieser nachdrücklich zu und bekannte, dass er mithilfe gerade dieses Theorems die Oberfläche des parabolischen Conoids und anderer derartiger Oberflächen, die im Werk über die Pendeluhr ohne Beweis dargestellt sind, vor vielen Jahren gefunden hat. Dadurch wurde unser [Mann] angespornt, – durch die wahrgenommene Fruchtbarkeit dieser Überlegungen, weil er vorher die unendlich kleinen Dinge nur wie Intervalle zwischen Ordinaten nach der cavalierischen Art betrachtet hatte –, und dachte sich ein Dreieck $_1Y\ D\ _2Y$ (Fig. 155) aus, welches er das charakteristische nannte; dessen zu $_1X\ _2X$, $_1Z\ _2Z$ gleiche Seiten $D\ _1Y$, $D\ _2Y$ wären die Teile der Koordinaten bzw. Koabszissen AX, AZ, und die dritte Seite wäre der Teil $_1Y\ _2Y$ der notfalls verlängerten Tangente $T\Omega$. Und er sah, dass zu diesem, wenn auch unzuordbaren (bzw. unendlich kleinen Dreieck), immer ähnliche Dreiecke zuordbar sein können. Es sollen nämlich AXX, AZZ senkrecht aufeinander stehende Geraden sein; die Koabszissen AX, AZ; die Koordinaten YX, YZ; die Tangente $T\Theta Y$; die Normale $PY\Pi$; die Subtangenten XT, $Z\Theta$; die Subnormalen XP, $Z\Pi$; schließlich werde eine zur Achse AX parallele Gerade EF gezogen, und auf diese treffe die Tangente TY bei Ω, von wo aus zur Achse hin die Senkrechte ΩH geführt werde. Es werden ähnliche Dreiecke $_1Y\ D\ _2Y$, TXY, $YZ\Theta$, $TA\Theta$, YXP, ΠZY, ΠAP, $TH\Omega$[ii] und viele derartige andere, wenn es gefällt, entstehen. Daher wird z. B. $P\ _2Y \cdot {_1Y}\ D = {_2Y}\ _2X \cdot {_2Y}\ _1Y$ wegen der ähnlichen Dreiecke $_1Y\ D\ _2Y$, $_2Y\ _2X\ P$, d. h., die angelegte

Fig. 155.



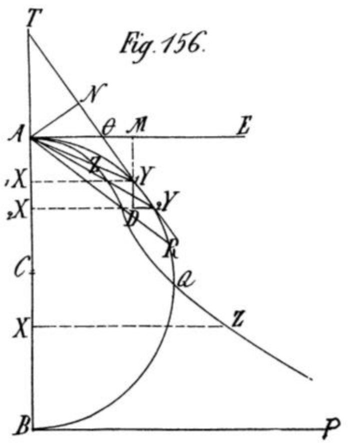
verbi gratia ob triangula similia $_1Y\,D\,_2Y$, $_2Y\,_2X\,P$ fit $P\,_2Y \cdot {}_1Y\,D = {}_2Y\,_2X \cdot {}_2Y\,_1Y$, id est perpendicularis P_2Y applicata ducta in $_1DY$ seu $_1X_2X$ elementum axis aequatur ipsi ordinatae $_2Y_2X$ ductae in $_1Y_2Y$ elementum curvae, id est momento elementi curvae ex axe. Unde totum momentum curvae per summam perpendicularium axi applicatarum habetur. Et ob triangula similia $_1Y\,D\,_2Y$ et $TH\Omega$ fit $_1Y_2Y : {}_2YD = T\Omega : \Omega H$ seu $\Omega H \cdot {}_1Y_2Y = T\Omega \cdot {}_2YD$, id est constans ΩH ducta in elementum curvae $_1Y_1Y$ aiquatur ipsi $T\Omega$ ductae in $_2YD$ seu $_1Z_2Z$ elementum coabscissae. Et proinde figura plana orta ex ipsis $T\Omega$ ordinatim normaliter applicatis ad AZ in ZZ aequatur rectangulo sub curva in rectam extensa et constante $H\Omega$. Sic etiam ob triangula similia $_1YD_2Y$ et $_2Y_2XP$ fit $_1YD : D_2Y = {}_2Y_2X : {}_2XP$, atque adeo $_2XP \cdot {}_1YD = {}_2Y_2X \cdot D_2Y$, seu subperpendiculares $_2XP$ ordinatim applicatae ad axem seu ad $_1YD$ vel $_1X_2X$ aequantur ordinatis $_2Y_2X$ in sua elementa D_2Y ordinatim ductis. Sed Rectae inde a nihilo crescentes in sua elementa ductae conficiunt triangulum. Esto enim semper $AZ = ZL$, fiet triangulum rectangulum AZL, quod est dimidium quadrati AZ, itaque figura orta ex subperpendicularibus ordinatim et perpendiculariter axi applicatis semper aequatur dimidio quadrati ordinatae. Et proinde, data figura quadranda, quaeritur figura, cujus subperpendiculares aequentur ordinatis figurae datae, ea erit figurae datae quadratrix. Atque ita ex hac facillima meditatione habemus reductionem ad quadraturas planas superficierum rotatione genitarum, et exstant rectificationes curvarum, et simul ipsas figurarum quadraturas reducimus ad problema tangentium inversum.

His ita repertis, magnam vim theorematum (ex quibus multa erant non inelegantia) in chartam conjecit noster, duarum classium. Pars enim contenta erat quantitatibus assignabilibus more non Cavallerii tantum et Fermatii et Honorati Fabrii, sed et Gregorii a S. Vincentio, Guldini et Dettonvillaei

Kurvennormale $P\,_2Y$ multipliziert mit $D\,_1Y$[iii] bzw. mit dem Achsenelement $_1X\,_2X$ ist gleich der Ordinate $_2Y\,_2X$ multipliziert mit dem Kurvenelement $_1Y\,_2Y$, d. h. gleich dem Moment des Kurvenelements von der Achse aus. Daraus erhält man das gesamte Kurvenmoment durch die Summe der an die Achse angelegten Kurvennormalen. Und wegen der ähnlichen Dreiecke $_1Y\,D\,_2Y$ und $TH\Omega$ wird $_1Y\,_2Y : {}_2Y\,D = T\Omega : \Omega H$ bzw. $\Omega H \cdot {}_1Y\,_2Y = T\Omega \cdot {}_2Y\,D$, d. h. die Konstante ΩH multipliziert mit dem Kurvenelement $_1Y\,_2Y$[iv] ist gleich $T\Omega$ multipliziert mit $_2Y\,D$ bzw. mit dem Koabszissenelement $_1Z\,_2Z$. Und daher ist die ebene Figur, die aus den der Reihe nach senkrecht an AZ in ZZ angelegten $T\Omega$ entstanden ist, gleich dem Rechteck unter der zur Geraden ausgestreckten Kurve und der Konstanten $H\Omega$. So wird auch $_1Y\,D : D\,_2Y = {}_2Y\,_2X : {}_2X\,P$ wegen der ähnlichen Dreiecke $_1Y\,D\,_2Y$ und $_2Y\,_2X\,P$, und deshalb $_2X\,P \cdot {}_1Y\,D = {}_2Y\,_2X \cdot D\,_2Y$, bzw. die der Reihe nach an die Achse bzw. an $_1Y\,D$ oder $_1X\,_2X$ angelegten Subnormalen $_2X\,P$ sind gleich den Ordinaten $_2Y\,_2X$ der Reihe nach multipliziert mit ihren Elementen $D\,_2Y$. Aber die von dort von Null ab wachsenden, mit ihren Elementen multiplizierten Geraden stellen ein Dreieck her. Es soll nämlich immer $AZ = ZL$ sein, es wird das rechtwinklige Dreieck AZL entstehen, das die Hälfte des Quadrats von AZ ist; und deshalb ist die Figur, die aus den der Reihe nach und senkrecht an die Achse angelegten Subnormalen entstanden ist, immer gleich der Hälfte des Quadrats der Ordinate. Und daher wird, wenn eine zu quadrierende Figur gegeben ist, eine Figur gesucht, deren Subnormalen gleich den Ordinaten der gegebenen Figur sein mögen, diese wird eine Quadratrix der gegebenen Figur sein. Und so haben wir von dieser sehr leichten Überlegung her eine Zurückführung der durch eine Drehung erzeugten Oberflächen auf ebene Quadraturen, und es gibt Rektifikationen von Kurven, und gleichzeitig führen wir eben jene Quadraturen von Figuren auf das inverse Tangentenproblem zurück.

Nach diesen Entdeckungen brachte unser [Mann] eine große Menge von Theoremen (von denen viele nicht unelegant waren) zu Papier, die zu zwei Abteilungen gehören. Ein Teil war nämlich beschränkt auf zuordbare Quantitäten, die nach Art nicht nur des Cavalieri und Fermat oder Honoré Fabri sondern auch des Grégoire de Saint Vincent, Guldin und Dettonville behandelt wurden; ein Teil aber hing von den unzuordbaren ab und brachte die Geometrie viel weiter vorwärts. Aber unser [Mann] vernachlässigte es, tractatis; pars vero pendebat ab inassignabilibus, multoque longius Geometriam provehebat. Sed haec postea prosequi neglexit noster, postquam animadvertit eandem Methodum non tantum ab Hugenio, Wallisio, Wrenno et Heuratio et Neilio, sed etiam a Jacobo Gregorio et Barrovio usurpatam excultamque fuisse. Exponere tamen hoc loco non inutile visum est, ut appareat, quibus gradibus ad majora sit perventum, atque etiam ut velut manu ducantur, qui adhuc tirones in recondita Geometria altius assurgere optant.

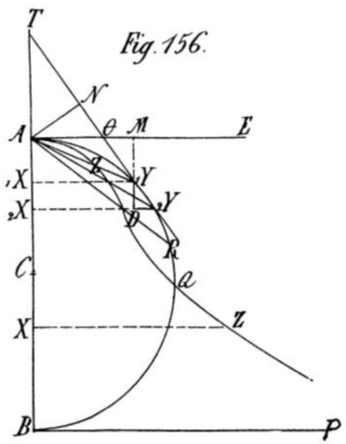
Atque haec A. D. 1673 et parte Anni 1674 Parisiis egit Leibnitius. Sed Anno 1674 (quantum recordari potest) incidit in Arithmeticum illum celebrem Tetragonismum, quod qua ratione factum sit exponere operae pretium erit. Solebant Geometrae figuras resolvere in rectangula per parallelas ordinatim ductas; ipse oblata forte occasione resolvit in triangula per rectas in unum punctum concurrentes, dispexitque quomodo aliquid novi inde commodi duci posset. Sit (fig. 156) linea AYR, ducantur AY quot lubet, ducatur et axis quicunque AC,



eique normalis vel coaxis AE, hos tangens ipsius curvae in Y secet in T et Θ. In eam ex A agatur normalis AN, manifestum est triangulum elementare $A{}_1Y{}_2Y$ aequari dimidio rectangulo sub elemento curvae ${}_1Y{}_2Y$ et sub ipsa AN. Ducatur jam triangulum characteristicum supra dictum ${}_1YD{}_2Y$, cujus hypotenusa sit portio tangentis vel elementum arcus, latera sint parallela axi et coaxi; patet ob triangula similia $AN\Theta$ et ${}_1YD{}_2Y$ fore ${}_1Y{}_2Y : {}_1YD = A\Theta : AN$ seu $A\Theta \cdot {}_1YD$ vel $A\Theta \cdot {}_1X{}_2X = AN \cdot {}_1Y{}_2Y =$ (per supradicta) duplo triangulo $A{}_1Y{}_2Y$. Itaque si quaevis $A\Theta$ translata intelligatur in XY

diese Dinge später zu verfolgen, nachdem er erkannt hatte, dass dieselbe Methode nicht nur von Huygens, Wallis, Wren und Van Heuraet und Neil, sondern auch von James Gregory und Barrow benutzt und verfeinert worden ist. Eine Darstellung an dieser Stelle erschien jedoch nicht nutzlos, damit klar wird, über welche Stufen es zu größeren Dingen gekommen ist, und damit diejenigen gleichsam an der Hand geführt werden, die bis jetzt Anfänger sind und wünschen, in der verborgenen Geometrie höher aufzusteigen.

Und diese Dinge verfolgte Leibniz im Jahre des Herrn 1673 und in einem Teil des Jahres 1674 in Paris. Aber im Jahr 1674 (soweit er sich erinnern kann) stieß er auf jenen berühmten arithmetischen Tetragonismus; es wird der Mühe wert sein darzustellen, auf welche Art dieser zustande gebracht wurde. Die Geometer waren gewohnt, Figuren durch der Reihe nach gezogene Parallelen in Rechtecke aufzulösen; bei einer zufällig sich ergebenden Gelegenheit löste er sie in Dreiecke auf durch Geraden, die zu einem einzigen Punkt hin zusammenlaufen, und er überlegte, wie daraus irgendein neuer Vorteil abgeleitet werden könnte. Es sei AYR eine Linie (Fig. 156), es mögen beliebig viele AY gezogen werden, es möge auch eine beliebige Achse AC und eine zu ihr Senkrechte oder Koachse AE gezogen werden, es schneide diese in T und Θ die Tangente eben jener Kurve bei Y. Zu ihr hin



werde von A die Senkrechte AN geführt; offenbar ist das elementare Drei-eck $A{}_1Y{}_2Y$ gleich dem halben Rechteck unter dem Kurvenelement ${}_1Y{}_2Y$ und unter AN. Nunmehr werde das oben erwähnte charakteristische Dreieck ${}_1Y\,D\,{}_2Y$ gezogen, dessen Hypotenuse ein Teil der Tangente oder ein Bogenelement sei, die Seiten seien parallel zur Achse und Koachse; wegen der ähnlichen Dreiecke $AN\Theta$ und ${}_1Y\,D\,{}_2Y$ ist klar, dass ${}_1Y{}_2Y : {}_1Y\,D = A\Theta : AN$ sein wird bzw. $A\Theta \cdot {}_1Y\,D$ oder $A\Theta\,{}_1X\,{}_2X = AN \cdot {}_1Y\,{}_2Y =$ (nach dem oben gesagten) dem doppeltem Dreieck $A\,{}_1Y\,{}_2Y$. Wenn daher jede beliebige Gerade $A\Theta$ zur notfalls verlängerten XY hin übertragen gedacht wird in der Weise, dass auf ihr XZ genommen wird, dann wird daraus das si opus productam, ita ut in hac sumatur XZ, fiet inde trilineum AXZA aequale duplo segmenti AY⌣A, comprehensi recta AY et arcu A⌣Y. Atque ita habentur quas vocaverat figuras segmentorum, seu segmentis proportionales. Similis methodus procedit, cum punctum A sumatur extra curvam, et tunc hac methodo habentur Trilinea sectoribus proportionalia ex puncto illo concursus abcscissis. Quin etsi rectae non in lineam, sed in curvam (quam ordinatim tangunt) concurrant, non eo minus hac ratione utilia Theoremata formabuntur, sed talia persequi hujus loci non est. Sufficit nostro scopo considerare figuram segmentorum et in Circulo quidem, ubi si punctum A ponatur in initio quadrantis AYQ, curva AZQZ secabit circulum in fine quadrantis Q, atque inde descendens basi BP (normali ad diametrum in altero extremo B) asymptota erit; et tamen tota figura infinitae longitudinis inter diametrum AB, basin BP etc. et curvam basi asymptotam AZQZ etc. comprehensa aequabitur circulo circa diametrum AB. Sed ut ad rem veniamus, posito radio unitate, ex AX vel ΘZ, x, et AΘ vel XZ, z, fiet x = 2zz : , 1 + zz; summa autem ipsarum x ad AΘ applicatarum seu ut hodie loquimur ∫xdz est trilineum AΘZA, complementum trilinei AXZA, quod duplo segmento circulari ostendimus aequale. Idem etiam assecutus autor est Methodo transmutationum, quam in Angliam misit. Id agitur ut omnes $\sqrt{1-xx}=y$ summentur; fiat $y=\pm 1\mp xz$, unde fit x = 2z:, 1 + zz et $y=\pm zz\mp 1,:,zz+1$. Ita rursus tantum opus est summari rationales. Nova haec et elegans via visa est etiam Newtono, sed fatendum est, non esse universalem. Caeterum patet, hinc etiam haberi arcum ex sinu, et alia id genus, sed mediate. Quin vero postea intellexit noster, haec inde deducere Newtonum immediate suis extractionibus, id cognoscere desideravit. Hinc statim apparuit, qua methodo Nicolaus Mercator dederat Arithmeticum

Trilineum AXZA werden, das gleich dem Doppelten des Segments AY⌣A ist, das von der Geraden AY und dem Bogen A⌣Y umschlossen ist. Und auf diese Weise erhält man die Figuren, die er Segmentfiguren bzw. zu den Segmenten proportionale Figuren genannt hatte. Eine ähnliche Methode hat Erfolg, wenn man den Punkt A außerhalb der Kurve wählt, und man dann nach dieser Methode Trilinea erhält, die proportional zu den Sektoren sind, die von jenem Schnittpunkt aus abgeschnitten sind. Ja sogar auch, wenn die Geraden nicht auf eine gerade, sondern auf eine gekrümmte Linie (die sie der Reihe nach berühren) treffen, werden nichtsdestoweniger mit dieser Methode nützliche Theoreme gebildet werden, aber derartigen nachzugehen gehört nicht an diese Stelle. Für unser Ziel reicht es aus, die Segmentfigur zu betrachten, und zwar beim Kreis, wo, wenn der Punkt A am Anfang des Viertelkreises AYQ gesetzt wird, die Kurve AZQZ den Kreis am Ende Q des Viertelkreises schneiden wird, und von dort wird sie absteigend asymptotisch zur Basis BP sein (die senkrecht zum Durchmesser beim anderen äußersten Punkt B liegt); und trotzdem wird die gesamte Figur von unendlicher Länge, die zwischen dem Durchmesser AB, der Basis BP etc. und der zur Basis asymptotischen Kurve AZQZ etc. eingeschlossen ist, gleich dem Kreis um den Durchmesser AB sein. Aber damit wir zur Sache kommen, wird der Radius Eins gesetzt, und AX oder ΘZ x, und AΘ oder XZ z, so wird sich x = 2zz : (1 + zz) ergeben; die Summe aber der an AΘ angelegten x bzw., wie wir heute sagen, ∫xdz, ist das Trilineum AΘZA, das Komplement des Trilineums AXZA, das wir als gleich dem doppelten Kreissegment gezeigt haben. Dasselbe erreichte der Autor auch mit der Methode der Transmutationen, die er nach England geschickt hat. Es handelt sich darum, dass alle $\sqrt{1-xx}=y$ summiert werden; sei $y=\pm 1\mp xz$, woraus x = 2z : (1 + zz) und $y=(\pm zz\mp 1):(zz+1)$ entsteht. So ist es wiederum nur nötig, rationale [Quantitäten] zu summieren. Dieser neue und elegante Weg wurde auch von Newton gesehen, aber man muss zugeben, dass er nicht universell ist. Übrigens ist klar, dass man von daher auch den Bogen aus dem Sinus erhält, und andere derartige Dinge, aber mittelbar. Ja, später erkannte unser [Mann] sogar, dass Newton diese Dinge von dort her unmittelbar durch seine [Wurzel-]Extraktionen ableitet, das kennen zu lernen, wünschte er. Daher war sofort offensichtlich, dass mit der Methode, mit der Nikolaus Mercator einen arithmetischen Tetragonismus der Hyperbel mittels

Hyperbolae Tetragonismum per seriem infinitam, etiam circuli dari, sublata asymmetria, et dividendo per $1 + zz$, ut ille diviserat per $1 + z$. Et mox invenit autor theorema generale pro dimensione figurae conicae centrum habentis. Nempe sector, comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc., posito t esse portionem tangentis in vertice, interceptam inter verticem et tangentem alterius extremi, et unitatem esse quadratum a semiaxo conjugato seu rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso, et $\pm$ significare $+$ in Hyperbola, sed $-$ in Circulo et Ellipsi. Unde etiam posito quadrato diametri 1, fiebat circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ + etc. Hoc inventum cum noster Hugenio adjecta demonstratione ostendisset, mirifice ille applausit, et cum remitteret dissertationem, literis adjunctis dixit, id inventum semper memorabile apud Geometras futurum, et spem inde nasci, posse aliquando ad solutionem generalem perveniri, nempe aut exhibendo verum valorem aut demonstrando impossibilitatem in quantitatibus receptis. Nempe neque ipse, neque inventor, neque alius quisquam Parisiis, quod constet, aliquid de serie rationali infinita magnitudinem circuli exhibente (quas a Newtono et Gregorio excogitatas postea constitit) quicquam fando audierat. Certe non Hugenius, ut ex hac ipsa subjuncta ejus epistola ……… data patet[v]; itaque hac prima vice circulum seriei quantitatum rationalium exacte aequalem demonstratum Hugenius credidit. Idem (vel ipsius Hugenii, harum rerum peritissimi, testimonio fretus) credidit inventor, atque ideo epistolas illas binas ad Oldenburgium Anno 1674 scripsit, quas adversarii ipsi edidere, in

einer unendlichen Reihe geliefert hatte, auch einer des Kreises geliefert wird nach Beseitigung der Asymmetrie und indem man durch $1 + zz$ teilt, wie jener durch $1 + z$ geteilt hatte. Auch entdeckte der Autor bald ein allgemeines Theorem für die Ausmessung einer mit einem Zentrum versehenen Kegelfigur. Der Sektor nämlich, der vom Bogen des Kegelschnitts vom Scheitel ab beginnend und von den vom Zentrum aus zu seinen äußersten [Punkten] gezogenen Geraden umschlossen ist, ist gleich dem Rechteck unter dem halben latus transversum und der Geraden $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc., vorausgesetzt, dass t der Teil der Scheiteltangente ist, der zwischen dem Scheitel und der Tangente des anderen äußersten Punktes eingeschlossen ist, und dass das Quadrat von der konjugierten Halbachse bzw. das Rechteck unter den halben latus rectum und latus transversum Eins ist, und dass $\pm$ bei der Hyperbel $+$, bei dem Kreis und der Ellipse aber $-$ bedeutet. Daher wurde auch, wenn das Quadrat des Durchmessers Eins gesetzt ist, der Kreis $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ + etc. Als unser [Mann] diese Entdeckung mit einem beigefügten Beweis Huygens gezeigt hatte, lobte jener sie außerordentlich; und als er die Abhandlung zurückschickte, sagte er in einem beigefügten Brief, dass die Entdeckung bei den Geometern immer erwähnenswert sein wird und daraus die Hoffnung entstehe, irgendwann zu einer allgemeinen Lösung gelangen zu können, nämlich entweder durch eine Darstellung des wahren Wertes oder durch einen Beweis der Unmöglichkeit in althergebrachten Quantitäten. Weder er selbst nämlich, noch der Entdecker noch irgend ein anderer in Paris, – was wohl feststeht –, hatte auch nur irgendetwas vom Hörensagen über eine rationale unendliche Reihe gewusst, die die Größe des Kreises darstellt (dass diese von Newton und Gregory ausgedacht wurden, stand später fest). Sicherlich nicht Huygens, wie es aus eben diesem seinem beigefügten Brief … offensichtlich ist …[v], der [am …] verfasst wurde; deshalb hielt Huygens es für jetzt zum ersten Mal bewiesen, dass der Kreis einer Reihe von rationalen Quantitäten genau gleich ist. Dasselbe (auch im Vertrauen auf das Zeugnis des in diesen Sachen äußerst erfahrenen Huygens) glaubte der Entdecker, und deshalb schrieb er jene zwei Briefe an Oldenburg im Jahr 1674, die die Gegner herausgaben, in denen er gleichsam als eine neue Sache ankündigt, dass er, und zwar als erster von allen, die durch eine Reihe rationaler Zahlen ausgedrückte Größe quibus tanquam rem novam nuntiat, se et quidem primum omnium invenisse magnitudinem circuli serie numerorum rationalium expressam, quod jam in Hyperbola praestitum constabat. Quodsi jam ipsi Londini agenti anno praecedente Oldenburgius series Gregorii et Newtoni communicasset, debebat summa esse ipsius impudentia, hoc ad Oldenburgium scribere audentis, et Oldenburgii obliviositas vel praevaricatio dissimulationem non exprobrantis. Nam ipsi adversarii exhibent responsionem Oldenburgii, qua tantum indicat (ignorare Te nolim, ait) similes series etiam Gregorio et Newtono innotuisse, quas etiam anno demum sequente literis mense Aprili datis (quas ipsi exhibent) communicavit. Unde intelligi potest, quam fuerint vel caeci invidia, vel perfricti malignitate, qui nunc fingere audent, Oldenburgium talia ipsi jam anno praecedente communicasse, quanquam aliquid caecitatis insit malignitati, quod non viderunt edere se, quibus sua figmenta everterent, nec potius has ipsius Oldenburgiique literas ut alias ex toto vel parte suppresserunt. Caeterum ex eo demum coepit ipse cum Oldenburgio communicare de rebus Geometricis, ex quo scilicet ipse aliquod communicatione dignum invenisse judicavit, antea in his studiis tiro. Priores autem Parisiis datae 30 Martii, 26 Aprilis, 24 Maji, 8 Juni Anni 1673, quas ipsi adesse ajunt, sed supprimunt cum Oldenburgii responsionibus, haud dubie de aliis rebus egere, nihilque illis praebuere, unde fictitiae illae Oldenburgii communicationes credibiliores reddi posent. Caeterum ubi audivit noster, Newtonum et Gregorium ad series pervenisse per extractiones radicum, agnovit hoc sibi novum esse, neque initio satis intellexit, idque ingenue fassus est ipse et in nonnullis declarationem expetivit, praesertim quando series quaerebantur reciprocae, pro quibus ex infinita serie extrahenda erat radix per aliam seriem infinitam, atque hinc etiam patet falsum esse quod adversarii fingunt, Oldenburgium ei Newtoniana scripta communicasse; nam

des Kreises entdeckt hat, was schon bei der Hyperbel als erwiesen bekannt war. Wenn nun also Oldenburg eben jenem im vorhergehenden Jahr in London sich aufhaltenden die Reihen des Gregory und Newton mitgeteilt hätte, musste es die größte Unverschämtheit von eben jenem sein, indem er es wagte, dieses an Oldenburg zu schreiben, und die Vergesslichkeit oder Pflichtverletzung Oldenburgs, indem er das Verschweigen nicht vorwirft. Denn die Gegner selbst bieten die Antwort Oldenburgs dar, in der er nur angibt (ich möchte wohl, dass du weißt, sagt er), dass ähnliche Reihen auch Gregory und Newton bekannt geworden sind, die er schließlich auch im folgenden Jahr in einem auf den Monat April datierten Brief (den eben jene darbieten) mitgeteilt hat. Daraus kann man erkennen, wie diejenigen entweder blind vor Neid oder von Bosheit zersetzt gewesen sind, die nun zu erdichten wagen, dass Oldenburg derartige Dinge eben jenem schon im vorhergehenden Jahr mitgeteilt hat; jedoch irgendetwas von Blindheit mag der Bosheit anhaften, weil sie nicht gesehen haben, dass sie das herausgeben, womit sie ihre Erdichtungen zerstören würden, und nicht lieber diese Briefe von eben jenem oder von Oldenburg wie die anderen im Ganzen oder zum Teil unterdrückt haben. Übrigens begann er erst dann mit Oldenburg über geometrische Sachen zu kommunizieren, seitdem er nämlich selbst meinte, irgendetwas Mitteilungswürdiges entdeckt zu haben, ein Anfänger vorher in diesen Studien. Die früheren datieren vom 30. März, 26. April, 24. Mai, 8. Juni des Jahres 1673 aus Paris; dass diese vorhanden sind, sagen sie selbst, aber sie unterdrücken sie zusammen mit den Antworten Oldenburgs; zweifellos handelten sie von anderen Dingen und lieferten für jene nichts, womit jene erdichteten Briefwechsel Oldenburgs glaubhafter gemacht werden könnten. Sobald übrigens unser [Mann] hörte, dass Newton und Gregory zu den Reihen durch Wurzelextraktionen gelangt sind, erkannte er an, dass dies für ihn neu ist, und verstand anfangs nicht genug [davon]; und das hat er selbst offen bekannt und bei einigen Dingen um Klärung gebeten, vor allem, wann reziproke Reihen gesucht wurden, für die die Wurzel aus einer unendlichen Reihe mittels einer anderen unendlichen Reihe zu ziehen war; und von daher ist auch klar, dass es falsch ist, was die Gegner erdichten, Oldenburg habe ihm Newtonsche Schriften mitgeteilt; denn dann hätte er es nicht nötig gehabt, um Klärung zu bitten; aber später, sobald er angefangen hatte, die Differentialrechnung aufzudecken, hat er sich eine neue, äußerst universelle Kunst ausgedacht, um unendliche Reihen ohne [Wurzel-]Ziehen ita declarationem petere opus non habuisset, sed postea ubi calculum differentialem detegere coepit, novam excogitavit artem longe universalissimam inveniendi series infinitas sine extractionibus accommodatam quantitatibus tam communibus quam transcendentibus, assumta serie quaesita tanquam inventa; eaque methodo usus est ad absolvendum Quadraturae Arithmeticae opusculum, ubi etiam aliena inventa serierum pro arcu ex sinu, aut ex sinu complementi inserebat, et regressum etiam, dato scilicet arcu sinum vel sinum complementi invenire, nova hac Methodo demonstrabat. Eaque etiam causa est, cur postea methodis alienis non indiguerit. Et tandem hanc suam novam eliciendi series rationem in Actis Eruditorum publicavit. Caeterum cum in eo esset, ut opusculum quadraturae Arithmeticae Parisiis ederet, in Germaniam revocatus est, et novi calculi arte exculta, priora minus curavit.

Porro nunc jam exponendum est, quomodo paulatim ad novum Notationis genus pervenerit noster, quod calculum differentialem appellavit. Jam A. D. 1672 de numerorum proprietatibus colloquenti Hugenius proposuerat hoc problema: invenire summam seriei decrescentis fractionum, cujus numeratores sint unitates, denominatores vero sint numeri triangulares, cujus summam ajebat se invenisse inter collationes cum Huddenio de aleae aestimatione. Noster invenit summam esse 2, quod cum Hugeniana propositione consentiebat. Eadem opera invenit summas serierum hujusmodi numericarum, cum denominatores sunt Numeri combinatorii quicunque, idque indicavit Oldenburgio Febr. 1673, quam adversarii edidere. Cum postea Pascalii triangulum Arithmeticum vidisset ejus exemplo Harmonicum concinnavit.

aufzufinden, die den gewöhnlichen ebenso wie den transzendenten Quantitäten angepasst ist, wobei die gesuchte Reihe gleichsam als gefunden angenommen ist; und diese Methode benutzte er, um ein kleines Werk über die arithmetische Quadratur zu vollenden, wo er auch die fremden Entdeckungen der Reihen für den Bogen aus dem Sinus oder aus dem Cosinus einfügte, und auch die Umkehrung, nämlich aus einem gegebenen Bogen den Sinus oder Cosinus aufzufinden, bewies er mit dieser neuen Methode. Und das ist auch der Grund, warum er später die fremden Methoden nicht nötig hatte. Und schließlich veröffentlichte er diese seine neue Methode zur Erzeugung von Reihen in den *Acta Eruditorum*. Übrigens wurde er, als er dabei war, jenes kleine Werk über die arithmetischen Quadratur in Paris herauszugeben, nach Deutschland zurückgerufen und kümmerte sich um die durch die Kunst des neuen Kalküls verfeinerten Dinge, um die früheren weniger.

Weiterhin soll nun dargelegt werden, wie unser [Mann] nach und nach zu der neuen Art einer Notation gelangte, die er Differentialrechnung nannte. Bereits im Jahre des Herrn 1672 hatte Huygens ihm während eines Gesprächs über die Eigenschaften der Zahlen folgendes Problem vorgelegt: es ist die Summe einer abnehmenden Reihe von Brüchen zu finden, bei der die Zähler Einsen, die Nenner aber die Dreieckszahlen seien; er sagte, dass er deren Summe während der Besprechungen mit *Hudde* über die Abschätzung des Würfelspiels gefunden habe. Unser [Mann] fand, dass die Summe 2 ist, was mit dem huygensschen Satz übereinstimmte. Mit demselben Aufwand fand er die Summen derartiger Zahlenreihen, wenn die Nenner beliebige kombinatorische Zahlen sind, und das teilte er *Oldenburg* im Februar 1673 [so] mit, wie es die Gegner veröffentlicht haben. Als er später das Arithmetische Dreieck von *Pascal* gesehen hatte, legte er nach seinem Vorbild das Harmonische zurecht.

Arithmetisches Dreieck,

Triangulum Arithmeticum,
ubi series fundamentalis est progressionis
Arithmeticae, nempe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

Triangulum Harmonicum,
ubi series fundamentalis est progressionis
Harmonicae $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&& \\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&& \\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&& \\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&& \\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&& \\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}& \\
\frac{1}{7}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{140}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{7}
\end{array}$$

etc.

in quo si denominatores cujuslibet seriei oblique descendentis in infinitum, itemque cujuslibet seriei paralleiae finitae dividantur per denominatorem termini in serie prima, prodeunt numeri combinatorii iidem qui in triangulo

wo die fundamentale Reihe zu einer arithmetischen Progression gehört,
nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

Harmonisches Dreieck,
wo die fundamentale Reihe zur harmonischen
Progression $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ gehört.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&& \\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&& \\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&& \\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&& \\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&& \\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}& \\
\frac{1}{7}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{140}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{7}
\end{array}$$

usw.

Wenn in diesem die Nenner einer beliebigen schräg ins Unendliche abnehmenden Reihe und ebenso einer beliebigen parallelen endlichen Reihe durch den Nenner des Terms in der ersten Reihe geteilt werden, kommen dieselben kombinatorischen Zahlen heraus, die man im arithmetischen Dreieck erhält. Beiden Dreiecken aber ist das gemeinsam, dass die schrägen

Arithmetico habentur. Utrique autem triangulo hoc est commune, quod series obliquae sunt invicem summatrices vel differentiales. In Triangulo Arithmetico series data est summatrix proxime praecedentis, et est differentialis proxime sequentis; at in Triangulo Harmonico contra series data est summatoria proxime sequentis et differentialis proxime antecedentis Ex quibus sequitur esse

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc.}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc.}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc.}=\frac{4}{3}$$

et ita porro.

Atque haec quidem habebat, cum nondum versatus esset in Analysi Cartesiana; sed cum hanc adjecisset, consideravit seriei terminum posse plerumque generali aliqua notatione designari, per quam ad seriem aliquam simplicem refertur. Verb. gr. si quivis terminus seriei naturalis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. vocetur x, quemlibet terminum seriei quadratorum fore xx, vel cuborum fore x^3 etc., quemlibet terminum triangularem, velut 0, 1, 3, 6, 10 etc. fore $\frac{x\cdot x+1}{1\cdot 2}$ seu $\frac{xx+x}{2}$, quemlibet pyramidalem 0, 1, 4, 10, 20 etc. fore $\frac{x\cdot x+1\cdot x+2}{1\cdot 2\cdot 3}$ vel $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ita porro. Et hinc per calculum generalem datae seriei posse inveniri seriem differentialem, et interdum etiam summatoriam, quando eam in numeris capit. Ex. gr. quadratus est xx, proxime major est xx + 2x + 1, differentia eorum est 2x + 1, id est series numerorum imparium est series differentialis quadratorum. Nam si x sit 0, 1, 2, 3, 4 etc., 2x + 1 sunt 1, 3, 5, 7, 9. Eodem modo differentia inter x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est 3xx + 3x + 1, itaque talis est terminus pro serie differentiali cuborum. Porro si valor termini seriei propositae possit ita

Reihen zueinander summatorisch oder differential sind. Im Arithmetischen Dreieck ist eine gegebene Reihe die summatorische der nächst vorhergehenden und die differentiale der nächst folgenden, aber im Harmonischen Dreieck ist dagegen eine gegebene Reihe die summatorische der nächst folgenden und die differentiale der nächst vorhergehenden. Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc.}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc.}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc.}=\frac{4}{3}$$

ist, und so weiter.

Und diese Dinge eben hatte er, als er noch nicht mit der kartesischen Analysis vertraut war. Als er diese aber hinzugenommen hatte, überlegte er, dass ein Term einer Reihe meistens durch irgendeine allgemeine Notation bezeichnet werden kann, mit der man sich auf irgendeine einfache Reihe bezieht. Wenn z. B. ein beliebiger Term der natürlichen Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. x genannt wird, wird ein beliebiger Term der Reihe der Quadrate xx, oder der Kuben x^3 etc. sein; ein beliebiger triangulärer Term wie 0, 1, 3, 6, 10 etc. wird $\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}$ bzw. $\frac{xx+x}{2}$ sein, ein beliebiger pyramidaler 0, 1, 4, 10, 20 etc. wird $\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ oder $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$ sein, und so weiter. Und daher kann durch einen allgemeinen Kalkül von einer gegebenen Reihe die differentiale Reihe und mitunter sogar die summatorische gefunden werden, wenn dieser sie in Zahlen erfasst. Z. B. ist das Quadrat xx, die nächst größere ist xx + 2x + 1, deren Differenz ist 2x + 1, d. h. die Reihe der ungeraden Zahlen ist die differentiale Reihe der Quadrate. Wenn x nämlich 0, 1, 2, 3, 4 etc. ist, sind die 2x + 1 [gleich] 1, 3, 5, 7, 9. Auf dieselbe Art ist die Differenz zwischen x^3 und $x^3 + 3xx + 3x + 1$ [gleich] 3xx + 3x + 1; so beschaffen ist deshalb ein Term für die differentiale Reihe der Kuben. Ferner, wenn der Wert eines Terms einer vorgelegten Reihe so durch ein exprimi per variantem x, ut varians neque denominatorem neque exponentem ingrediatur, videbat datae seriei summatricem semper inveniri posse. Ex. gr. si quaereretur summatrix quadratorum, cum constaret eam non posse assurgere ultra gradum cubi, fingebat ejus terminum esse = $lx^3 + mxx + nx = z$, quaeritur $dz = xx$; fiet $dz = ld(x^3) + md(xx) + n$ (posito $dx = 1$), sed $d(xx) = 2x + 1$, et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (per jam inventa), ergo fiet

$dz = 3lxx + 3lx + l + 2mx + m + n \simeq xx$;

ergo sit $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ seu $n = \frac{1}{6}$, seu terminus seriei quadratorum summatricis est $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$ vel $2x^3 - 3xx + x, : 6$. Exempli causa si quis velit summam novem vel decem primorum quadratorum ab 1 usque 81, vel ab 1 usque ad 100, pro x sumat 10 vel 11 numerum proxime majorem radice ultimi quadrati, et $2x^3 - 3xx + x, : 6$ erit $2000 - 300 + 10, : 6 = 285$, vel $2.1331 - 3.121 + 11, : 6 = 385$. Nec difficilius est multo, centum aut 1000 quadratos per compendium summare. Eademque methodus procedit in potentiis arithmeticorum quibuscunque aut formulis, quae ex potentiis talibus componuntur, ut scilicet semper quotcunque termini seriei talis compendio summari possint. Sed facile videbat noster, hoc non semper procedere, cum varians x ingreditur in denominatorem, ut scilicet summatrix series numerica reperiri posit; prosecuturus tamen hanc ipsam Analysin generaliter invenit atque etiam in Actis Eruditorum Lipsiensibus ostendit, semper posse inveniri seriem summatricem, vel rem reduci ad summandum numerum terminorum fractorum simplicium, velut $\frac{1}{x}$, vel $\frac{1}{xx}$, vel $\frac{1}{x^3}$ etc. qui numero terminorum finito proposito summari utique possunt, sed nondum compendiose satis; at si de numero terminorum infinito agatur, omnino summari non possunt termini quales $\frac{1}{x}$, quia tota

variierendes x ausgedrückt werden kann, dass das Variierende weder in den Nenner noch in den Exponenten eingeht, sah er, dass die summatorische einer gegebenen Reihe immer gefunden werden kann. Wenn z. B. die summatorische der Quadrate gesucht war, weil feststand, dass sie sich nicht über den Grad des Kubus erheben kann, stellte er sich vor, dass ihr Term = $lx^3 + mxx + nx = z$ ist; gesucht wird $dz = xx$. Es wird $dz = ld(x^3) + md(xx) + n$ werden (vorausgesetzt $dx = 1$), aber $d(xx) = 2x + 1$ und $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (durch das schon Gefundene). Also wird

$dz = 3lxx + 3lx + l + 2mx + m + n \simeq xx$ werden.

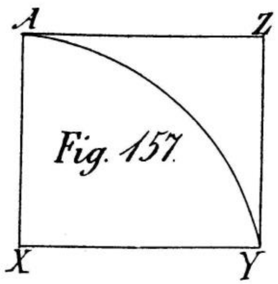
Es sei also $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ bzw. $n = \frac{1}{6}$, bzw. der Term der summatorischen Reihe der Quadrate ist $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$ oder $(2x^3 - 3xx + x) : 6$. Wenn jemand zum Beispiel die Summe der neun oder zehn ersten Quadrate von 1 bis 81 oder von 1 bis 100 will, nehme er für x 10 oder 11 die nächst größere als die Wurzel des letzten Quadrats, und $(2x^3 - 3xx + x) : 6$ wird $(2000 - 300 + 10) : 6 = 285$ oder $(2 \cdot 1331 - 3 \cdot 121 + 11) : 6 = 385$. Und es ist nicht viel schwieriger, hundert oder 1000 Quadrate durch die Abkürzung zu summieren. Und diese Methode verläuft erfolgreich bei beliebigen Potenzen natürlicher Zahlen oder bei Formeln, die aus derartigen Potenzen zusammengesetzt sind, sodass nämlich immer beliebig viele Terme einer derartigen Reihe durch eine Abkürzung summiert werden können. Aber unser [Mann] sah leicht, dass dies nicht immer vonstatten geht, wenn das variierende x in den Nenner eingeht, dass nämlich die summatorische Zahlenreihe gefunden werden kann. Jedoch bei der Verfolgung eben dieser Analysis entdeckte er allgemein und zeigte auch in den Leipziger *Acta Eruditorum*, dass immer eine summatorische Reihe gefunden werden kann, oder dass die Sache auf eine zu summierende Anzahl von einfachen, gebrochenen Termen zurückgeführt werden kann, wie $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{xx}$ oder $\frac{1}{x^3}$ etc.; diese können jedenfalls unter der Voraussetzung einer endlichen Anzahl von Termen summiert werden, aber noch nicht abgekürzt genug. Wenn es aber um eine unendliche Anzahl von Termen geht, können Terme wie $\frac{1}{x}$ überhaupt nicht summiert werden, weil die gesamte Reihe einer derartigen unendlichen Anzahl von Termen eine series infiniti talis terminorum numeri est quantitas infinita, sed termini numero infiniti quales $\frac{1}{xx}$ vel $\frac{1}{x^3}$, etsi conficiant quantitatem finitam, tamen hactenus summari non possunt, nisi suppositis quadraturis. Itaque jam A. D. 1682 mense secundo Actorum Lipsiensium observavit, si exponantur numeri $1 \cdot 3$, $3 \cdot 5$, $5 \cdot 7$, $7 \cdot 9$, $9 \cdot 11$ etc. seu 3, 15, 35, 63, 99 etc. atque inde fiat series fractionum $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. hanc seriem in infinitum descendentem componere non nisi $\frac{1}{2}$, sed si inde numeri excerpantur per saltum $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. exprimere magnitudinem semicirculi cujus diametri quadratum est 1. Nempe sit $x = 1$ vel 2 vel 3 etc., terminus seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{54}$ etc. est $\frac{1}{4xx+8x+3}$, quaeritur terminus seriei summatricis. Tentetur simplicissima ratione, an possit habere hanc formam $\frac{e}{bx+c}$; erit $\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{bbxx+bbx+bc+2bcx+cc}\simeq\frac{1}{4xx+8x+3}$, quas duas formulas identificando fit $b = 2$, $eb = 1$, ergo $e = ½$, $bb + 2bc = 8$ seu $4 + 4c = 8$ vel $c = 1$, et tandem $bc + cc = 3$, quod succedit. Ergo terminus seriei summatoriae est $\frac{1:2}{2x+1}$ vel $\frac{1}{4x+2}$; sunt autem $4x + 2$ imparium dupli. Postremo etiam vidit modum aliquem Calculum differentialem adhibendi ad series numericas, quando varians cadit in ipsum exponentem, ut in progressione geometrica, ubi posita radice b, terminus est b^x, existentibus x numeris naturalibus. Ergo terminus seriei differentialis erit $b^{x+1} - b^x = b^x(b - 1)$, unde manifestum seriem differentialem datae geometricae esse etiam geometricam datae proportionalem. Unde summa progressionis Geometricae habetur.

unendliche Quantität ist. Aber unendlich viele Terme wie $\frac{1}{xx}$ oder $\frac{1}{x^3}$, selbst wenn sie eine endliche Quantität zustande bringen, können trotzdem bis jetzt nicht summiert werden, außer durch vorausgesetzte Quadraturen. Daher beobachtete er schon im Jahre des Herrn 1682, im zweiten Monat der Leipziger Acta, dass, wenn die Zahlen $1 \cdot 3$, $3 \cdot 5$, $5 \cdot 7$, $7 \cdot 9$, $9 \cdot 11$ etc. bzw. 3, 15, 35, 63, 99 etc. dargestellt werden und von dort die Reihe der Brüche $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc. entsteht, diese ins Unendliche abnehmende Reihe nichts anderes als $\frac{1}{2}$ zusammensetzt, dass aber, wenn von dort durch einen Sprung Zahlen herausgenommen werden, $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. die Größe des Halbkreises ausdrückt, dessen Quadrat vom Durchmesser 1 ist. Es sei nämlich $x =$ [0 oder] 1 oder 2 oder 3 etc., der Term der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{54}$ etc. ist $\frac{1}{4xx+8x+3}$, gesucht wird der Term der summatorischen Reihe. Man versuche mit einer einfachsten Rechnung, ob er diese Form $\frac{e}{bx+c}$ haben kann. Es wird $\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{bbxx+bbx+bc+2bcx+cc}\simeq\frac{1}{4xx+8x+3}$ sein. Indem diese beiden Formeln identifiziert werden, entsteht $b = 2$, $eb = 1$, also $e = ½$, $bb + 2bc = 8$ bzw. $4 + 4c = 8$ oder $c = 1$, und schließlich $bc + cc = 3$; das gelingt. Also ist $\frac{1:2}{2x+1}$ oder $\frac{1}{4x+2}$ der Term der summatorischen Reihe, es sind aber $4x + 2$ die doppelten der ungeraden Zahlen. Schließlich sah er auch ein Verfahren für die Anwendung der Differentialrechnung auf Zahlenreihen, wenn die Variable auf den Exponenten selbst fällt, wie bei einer geometrischen Progression, wo, wenn die Wurzel b gesetzt ist, b^x der Term ist, wobei die x die natürlichen Zahlen sind. Also wird der Term der differentialen Reihe $b^{x+1} - b^x = b^x(b - 1)$ sein, weshalb offenbar die differentiale Reihe einer gegebenen geometrischen auch eine geometrische ist, die zur gegebenen proportional ist. Daraus erhält man die Summe einer geometrischen Progression.

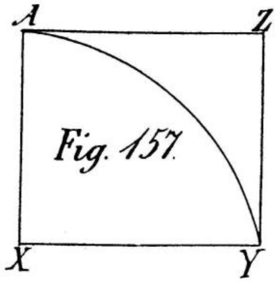
Mühelos aber erkannte unser [Mann], dass die Differentialrechnung bei

Facile autem animadvertit noster Calculum differentialem in Figuris esse mirum in modum facilem prae eo, qui in numeris exercetur, quia in figuris differentiae ipsis differentibus comparari non possunt; quoties autem additione vel subtractione conjunguntur, quae sunt inter se incomparabilia, minora prae majoribus evanescunt, atque hinc etiam irrationales non minus facile differentiari quam surdas, tum ope logarithmorum ipsas quantitates exponentiales. Observabat autem lineas infinite parvas in figuris occurrentes nihil aliud esse quam differentias momentaneas linearum variantium. Et quemadmodum quantitates hactenus consideratae simpliciter apud Analystas habuerant suas functiones, nempe potentias et radices, ita jam quantitates ut variantes habere novas functiones, nempe differentias. Et ut habuimus hactenus x, xx, x^3 etc. y, yy, y^3 etc., ita posse adhiberi dx, ddx, d^3x etc. dy, ddy, d^3y etc. Eoque modo jam Curvas etiam, quas Cartesius tanquam Mechanicas ex Geometria exclusit, aequationibus localibus exprimi et calculo tractari posse, animumque a continua ad figuras intentione liberari. Et in applicatione Calculi differentialis ad Geometriam, differentiationes primi gradus nihil aliud esse quam inventiones tangentium, differentiationes secundi gradus esse inventiones osculantium (quorum usum noster introduxit), et ita porro procedi posse. Neque vero haec tantum inservire ad tangentes et quadraturas, sed ad omne genus problematum et theorematum, ubi differentiae cum Terminis integrantibus, ut vocavit ingeniosissimus Bernoullius, varie miscentur, quemadmodum in problematis Physico-Mechanicis fieri solet. Itaque generaliter constituit, si qua series numerorum vel figura linearum proprietatem habeat ex duobus vel tribus vel quatuor etc. terminis proximis pendentem, posse exprimi per aequationem, quam ingrediantur differentiae primi vel secundi vel tertii gradus. Quin etiam theoremata invenit generalia pro gradu differentiae quocunque, uti habebamus theoremata pro gradu quocunque, et miram reperit analogiam

Figuren wunderbarerweise leicht im Vergleich zu der ist, die bei Zahlen betrieben wird, weil bei den Figuren die Differenzen nicht mit den Dingen verglichen werden können, die sich unterscheiden; so oft aber durch Addition oder Subtraktion die Dinge verbunden werden, die untereinander unvergleichbar sind, verschwinden die kleineren vor den größeren; und daher sind auch die irrationalen [Quantitäten] nicht weniger leicht zu differenzieren als die Wurzelausdrücke, sodann mit Hilfe der Logarithmen die exponentiellen Quantitäten. Er beobachtete aber, dass bei Figuren auftretende unendlich kleine Linien nichts anderes sind als momentane Differenzen von variierenden Linien. Und dass, wie die bis jetzt betrachteten Quantitäten bei den Analytikern auf einfache Art ihre Funktionen gehabt hatten, nämlich Potenzen und Wurzeln, so nun Quantitäten wie Variable neue Funktionen, nämlich Differenzen haben. Und dass, wie wir bis jetzt x, xx, x^3 etc., y, yy, y^3 etc. gehabt haben, so dx, ddx, d^3x etc., dy, ddy, d^3y etc. verwendet werden können. Und dass nun auf diese Art sogar Kurven, die *Descartes* gleichsam als mechanische aus der Geometrie ausgeschlossen hat, durch Ortsgleichungen ausgedrückt und durch ein Kalkül behandelt werden können, und dass der Geist vom beständigen Achtgeben auf Figuren befreit wird. Und dass bei der Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie die Differentiationen ersten Grades nichts anderes sind als die Ermittlungen der Tangenten, dass die Differentiationen zweiten Grades die Ermittlungen der Schmiegekreise sind (deren Gebrauch unser [Mann] eingeführt hat), und dass in der Weise weiter vorangeschritten werden kann. Und dass in der Tat diese Dinge nicht nur den Tangenten und Quadraturen dienen, sondern jeder Art von Problemen und Theoremen, wo Differenzen mit integrierenden Termen (wie sie der äußerst scharfsinnige *Bernoulli* genannt hat) auf verschiede Art gemischt werden, wie es bei physikalisch-mechanischen Problemen oft geschieht. Deshalb hat er es allgemein zustande gebracht, dass, wenn irgendeine Reihe von Zahlen oder Figur von Linien eine Eigenschaft hat, die von zwei oder drei oder vier etc. benachbarten Termen abhängt, diese durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann, in welche die Differenzen ersten oder zweiten oder dritten Grades eingehen mögen. Ja, er fand sogar allgemeine Theoreme für einen beliebigen Grad der Differenz, wie wir Theoreme für einen beliebigen Grad hatten, und er hat eine wunderbare Analogie zwischen Potenzen und Differenzen gefunden, die er in den *Miscellanea Berolinensia* veröffentlichte. Wenn der Rivale diese gekannt inter potentias et differentias in Miscellaneis Berolinensibus publicatam. Quam si novisset aemulus, non adhibuisset puncta pro gradibus differentiarum, quae inepta sunt ad generalem differentiae gradum exprimendum, sed notam d a nostro impositam vel similem retinuisset, ita enim d^e potest exprimere gradum differentiae generalem. Caeterum hinc jam omnia calculo exprimi poterant, quae olim figuris dabantur. Nam $\sqrt{(dxdx + dydy)}$ erat elementum curvae, ydx erat elementum areae, et $\int ydx$ et $\int xdy$ sibi mutuo esse complemento, statim ex eo patet, quod $d(xy) = xdy + ydx$ seu vicissim $xy = \int xdy + \int ydx$, quanquam interdum signa varientur; et ex eo quod $xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$, etiam tria solida exhibentur, quae sibi mutuo sunt complemento. Nec est opus theoremata illa nosse, quae supra ex triangulo characteristico duximus, verb. gr. momentum curvae ex axe sufficit explicari per $x\int\sqrt{(dxdx + dydy)}$. Et quae Gregorius a S. Vincentio habet de Ductibus, quae ipse aut Pascalius de Ungulis aut Cuneis, omnia statim ex tali calculo nascuntur. Itaque quae antea ab aliis inventa cum applausu, a se detecta cum voluptate viderat, jam magnopere curare desiit, quod omnia jam in tali calculo continentur. Ex. gr. momentum figurae AXYA (fig. 157) ex axe AX est $\frac{1}{2}\int yydx$; momentum figurae ex tangente verticis est $\int xydx$; momentum trilinei complementalis AZYA ex tangente verticis est $\frac{1}{2}\int xxdy$; sed haec duo momenta posteriora simul sumta componunt momentum rectanguli circumscripti AXYZ ex tangente verticis, adeoque mutuo sibi sunt complemento, quod est $\frac{1}{2} xxy$. Sed hoc sine consideratione figurae ostendit etiam calculus, nam $\frac{1}{2} d(xxy) = xydx + \frac{1}{2} xxdy$, ita ut jam non magis tot praeclaris egregiorum virorum theorematis opus sit ad Geometriam Archimedeam, quam illis ab Euclide in libro 2. aut alibi datis plerisque ad Geometriam communem. Pulchre evenit,



hätte, würde er für die Grade von Differenzen nicht Punkte benutzt haben, die unbrauchbar sind, um den allgemeinen Grad einer Differenz auszudrücken, sondern er hätte das von unserem [Mann] eingesetzte Schriftzeichen d oder ein ähnliches beibehalten, denn so kann nämlich d^e den allgemeinen Grad der Differenz ausdrücken. Übrigens konnte daher nun das alles durch einen Kalkül ausgedrückt werden, was früher durch Figuren gegeben war. Denn $\sqrt{(dxdx + dydy)}$ war ein Kurvenelement, ydx war ein Flächenelement, und dass $\int ydx$ und $\int xdy$ zueinander komplementär sind, ist sofort deswegen klar, weil $d(xy) = xdy + ydx$ bzw. umgekehrt $xy = \int xdy + \int ydx$ ist, jedoch mögen mitunter die Vorzeichen verändert werden; und deswegen, weil $xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$ ist, werden auch drei Körper dargestellt, die zueinander komplementär sind. Und es ist nicht nötig, jene Theoreme zu kennen, die wir oben aus dem charakteristischen Dreieck hergeleitet haben; z. B. genügt es, dass das Kurvenmoment von der Achse her durch $\int y\sqrt{(dxdx + dydy)}$ [vi] erklärt wird. Und was *Grégoire de Saint Vincent* bezüglich der *Ductus* hat, was er selbst oder Pascal bezüglich der *Ungulae* oder *Cunei* hat, das alles entsteht sofort aus einem derartigen Kalkül. Daher hatte er mit Vergnügen die von ihm aufgedeckten Dinge gesehen, die vorher von anderen unter Applaus gefunden wurden; er hörte nun auf, sich nachdrücklich darum zu kümmern, weil alles schon in einem derartigen Kalkül enthalten ist. Z. B. ist das Moment der Figur AXYA (Fig. 157) von der Achse AX her $\frac{1}{2}\int yydx$, das Moment der Figur von der Scheiteltangente her ist $\int xydx$; das Moment des komplementären Trilineums AZYA ist von der Scheiteltangente her $\frac{1}{2}\int xxdy$. Aber diese beiden letzteren Momente setzen als gleichzeitig genommene das Moment des umbeschriebenen Rechtecks AXYZ von der Scheiteltangente her zusammen, - und sie sind gerade gegenseitig zueinander das Komplement -, welches $\frac{1}{2} xxy$ ist. Aber das zeigt ohne Betrachtung der Figur der Kalkül, denn $\frac{1}{2} d(xxy) = xydx + \frac{1}{2} xxdy$, sodass nun keine größere Anzahl an glänzenden Theoremen von ausgezeichneten Männern zur Archimedischen Geometrie nötig ist, als die Mehrzahl jener von Euklid im Buch II oder anderswo gegebenen zur gewöhnlichen Geometrie. Es kam schön heraus, dass manchmal der Kalkül der transzendenten Quantitäten auf die



ut aliquando Calculus Transcendentium ducat ad ordinarias, quod Hugenio imprimis satisfaciebat. Veluti si inveniatur $2\int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{x}$, eo ipso fit $yy = x^3$, nempe ex natura Logarithmorum cum calculo differentiali combinata, quae etiam ipsamet ex eodem calculo derivatur; esto enim $x^m = y$, fiet $mx^{m-1}\,dx = dy$, ergo utrinque dividendo per aequalia erit $m\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$; rursus ex aeq. m log x = log y, ergo $\log x : \log y = \int\frac{dx}{x} : \int\frac{dy}{y}$. Unde etiam calculus exponentialis tractabilis redditur; esto enim $y^x = z$, fit $x \log y = \log z$, ergo $dx \log y + xdy : y = dz : z$. Et ita exponentes a variante liberamus, aut vicissim utiliter variantem in exponentem pro re nata transferimus. Denique ita ludus jocusque facta sunt, quae olim in admiratione erant. Hujus autem omnis calculi nec vola nec vestigium in aemuli scriptis ante edita a nostro Calculi praecepta extant, neque omnio quicquam quod non Hugenius aut Barrovius praestitissent modo eodem, si eadem tractassent. Sed quantum adjumenti praebeat hic calculus, candide agnovit Hugenius, quod adversarii supprimunt quantum possunt, et alia prorsus agunt, calculi differentiali[s] propria in toto suo scripto non attingentes, tantumque in seriebus infinitis haerentes, quarum methodem aemulum prae aliis provexisse nemo negat. Quae enim sub aenigmate dixerat et tandem explicuit, de Fluxionibus et Fluentibus loquuntur, id est de quantitatibus finitis et eorum elementis infinite parvis, sed quomodo unum ex alio derivandum sit, nec minimum adjumentum praebent. Et dum ille rationes nascentes aut evanescentes considerat, prorsus a differentiali calculo abduxit ad methodum exhaustionum, quae longe diversa est (etsi suas quoque utilitates habeat) nec per infinite parvas, sed ordinarias procedit, etsi in illis desinat.

gewöhnlichen führt, was Huygens vor allem befriedigte. Wenn beispielsweise $2\int\frac{dy}{y} = 3\int\frac{dx}{x}$ gefunden wird, entsteht eben dadurch $yy = x^3$, nämlich aus der mit der Differentialrechnung kombinierten Natur der Logarithmen, die sogar selbst aus demselben Kalkül hergeleitet wird: denn es soll $x^m = y$ sein, es wird $mx^{m-1}\,dx = dy$ werden, also wird, indem man auf beiden Seiten durch die Gleichen teilt, $m\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$ sein; wiederum aus den Gleichungen wird m log x = log y, also $\log x : \log y = \int\frac{dx}{x} : \int\frac{dy}{y}$. Daher wird auch der Exponentialkalkül auf einen behandelbaren zurückgeführt; denn es soll $y^x = z$ sein, es wird $x \log y = \log z$, also $dx \log y + xdy : y = dz : z$. Und so befreien wir die Exponenten von einer Variablen oder wir übertragen umgekehrt nutzbringend für einen entstandenen Sachverhalt die Variable in den Exponenten. So ist schließlich zu Spiel und Spaß geworden, was früher bewundert wurde. Von diesem ganzen Kalkül aber ist weder eine hohle Hand voll noch eine Spur in den Schriften des Rivalen vorhanden, bevor die Lehren des Kalküls von unserem [Mann] herausgegeben wurden, noch überhaupt etwas, was *Huygens* oder *Barrow* nicht auf dieselbe Art gezeigt hätten, wenn sie dieselben Dinge behandelt hätten. Welch weit reichendes Hilfsmittel aber dieser Kalkül liefert, erkannte Huygens klar an; das unterdrücken die Gegner, soweit sie können, und sie verfolgen geradewegs andere Dinge, wobei sie die Eigenschaften der Differentialrechnung in ihrer gesamten Schrift nicht berühren und nur bei den unendlichen Reihen hängen bleiben, deren Methode der Rivale mehr als andere weitergeführt hat, was niemand leugnet. Was er nämlich unter rätselhafter Andeutung gesagt hatte und schließlich erklärt hat, das spricht von Fluxionen und Fluenten, d. h. über endliche Quantitäten, und deren unendlich kleine Elemente; aber wie das eine aus dem anderen abzuleiten ist, dazu liefert dies auch nicht die geringste Hilfe. Und während jener entstehende oder verschwindende Verhältnisse betrachtet, hat er geradezu abgelenkt von der Differentialrechnung hin zur Exhaustionsmethode, die weitaus anders ist (auch wenn sie ebenfalls ihre Nützlichkeiten hat), und die nicht mittels unendlich kleiner, sondern mittels der gewöhnlichen Quantitäten voranschreitet, auch wenn sie bei jenen aufhört.

Weil die Gegner also weder aus dem *Commercium Epistolicum*, das sie

Cum ergo adversarii neque ex Commercio Epistolico, quod edidere, neque aliunde vel minimum indicium protulerint, unde constet aemulum tali calculo usum ante edita a nostro; ab his allata omnia ut aliena sperni possunt. Et usi sunt arte rabularum, ut judicantes a re de qua agitur ad alia diverterent, nempe ad series infinitas. Sed in iis nihil afferre potuerunt, unde Nostri candor gravaretur: nam ipse ingenue professus est, per quem in illis profecisset, sed tamen ibi quoque ad aliquid excelsius generaliusque tandem pervenit.

herausgegeben haben, noch anderswoher auch nur die geringsten Anzeichen vorgebracht haben, woher feststehe, dass der Rivale einen derartigen Kalkül vor den Veröffentlichungen unseres [Mannes] benutzte, können alle die von ihnen angeführten [Argumente] gleichsam als unangemessene verworfen werden. Und sie haben die Kunst der Rechtsverdreher benutzt, sodass sie die Urteilenden von der Sache, um die es sich handelt, ablenkten hin zu anderen Dingen, nämlich zu den unendlichen Reihen. Aber bei diesen haben sie nichts vorbringen können, woher die Aufrichtigkeit unseres [Mannes] belastet würde; denn er selbst hat offen bekannt, durch wen er bei jenen Dingen Fortschritte gemacht hat, aber er ist dennoch auch dort bei etwas Großartigerem und Allgemeinerem schließlich angekommen.

---

[i] 1684. Nova Methodus pro Maximis et Minimis, ...

[ii] geändert aus T**A**Ω

[iii] geändert aus $_1$D Y

[iv] geändert aus $_1$Y $_1$Y

[v] Lücke des Manuscripts [Brief von Leibniz an Huygens: 6.11.1674 (LSB III, 1, Nr. 40)]

[vi] geändert aus $\mathbf{x}\int\sqrt{(dxdx+dydy)}$